

9 – Formes quadratiques, coniques, quadriques

Avant la colle

Tester ses connaissances

- 1 a.** On note x, y, z, t les coordonnées du vecteur X de \mathbb{R}^4 .
Quelle est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique $q(X) = xy - yz + yt - t^2$?
Quelle est sa matrice dans la base canonique ?
- b. (PSI)** Quel est l'endomorphisme auto-adjoint associé ?
- 2 (PSI)** Soient q une forme quadratique et A sa matrice représentative dans une base B .
La matrice A est-elle symétrique ? Est-elle diagonalisable ?
Diagonaliser A est-il utile pour étudier q ?
- 3 a.** Une fois que l'on a obtenu l'équation réduite d'une conique, comment placer sa ou ses directrices ?
- b.** Qu'appelle-t-on « paramètre » de la conique et comment le calculer ?
- 4** On trouve plusieurs fois l'ensemble vide dans la classification des quadriques : dans l'étude des cônes, des ellipsoïdes, etc., peut-on dire qu'il y a « plusieurs types de quadriques vides » ?
- 5** Comment se manifeste, sur l'équation d'une quadrique, une propriété de symétrie par rapport à un des plans de coordonnées (par exemple le plan $x = 0$) ?
- 6** Identifier les quadriques ayant pour équation réduite :
- a.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$,
- b.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,
- c.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,
- d.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2y$.

Savoir appliquer le cours

- | | |
|---|--|
| <p>1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $M \mapsto \text{tr}({}^t M A M)$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.</p> <p>2 Soit b une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E.
Montrer que l'expression $q(x) = b(x, x)$ définit une forme quadratique sur E.</p> <p>3 Soit la forme quadratique $q(X) = 2xy + t^2$ sur \mathbb{R}^4 muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4).
Calculer de deux façons l'expression de b dans la base $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$,
$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$, $u_3 = e_3$, $u_4 = e_4$.</p> <p>4 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit la matrice d'un produit scalaire.</p> <p>5 a. Soit S une matrice symétrique positive à coefficients réels.
Montrer que $\text{tr } S \geq n(\det S)^{\frac{1}{n}}$.</p> | <p>b. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$\text{tr}({}^t A A) \geq n(\det A)^{\frac{2}{n}}$.</p> <p>6 Indiquer comment paramétrer les quadriques suivantes :</p> <p>a. les cylindres elliptique, parabolique ou hyperbolique ;
b. le cône (à base elliptique) ;
c. l'ellipsoïde ;
d. le H1 ;
e. le H2.</p> <p>7 Dans l'espace euclidien de dimension trois, on considère deux droites D et D' orthogonales, non sécantes.
Montrer que le lieu des points à égale distance de ces droites est une quadrique ; en donner la nature.</p> <p>8 Soient deux points distincts F, F' de l'espace euclidien de dimension trois.
Quel est le lieu des points tels que $MF + MF'$ est égal à une constante ?</p> |
|---|--|