8 – Endomorphismes d'un espace euclidien

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 PSI Reprendre la démonstration d'existence et d'unicité de l'adjoint pour répondre aux deux questions suivantes.
a. Le théorème s'énonce « Il existe un unique endomorphisme de E… ». On prouve en fait un résultat d'existence et d'unicité plus fort que celui qui est énoncé, lequel ?
b. La linéarité de u ne semble pas utile pour prouver que u^* est linéaire : quand sert-elle ?

2 PSI Démontrer les propriétés de l'application $u \mapsto u^*$ vis-à-vis de la somme et du produit de composition, sans passer par les propriétés de la transposition des matrices.

3 **a.** Une homothétie est-elle un automorphisme orthogonal ?
b. Une projection orthogonale est-elle un automorphisme orthogonal ?
c. Expliquer pourquoi, dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, tout endomorphisme qui permute les vecteurs de la base canonique, est un automorphisme orthogonal.

4 Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des automorphismes orthogonaux directs d'un espace vectoriel euclidien E ?

5 Proposer des procédés de construction généraux pour obtenir des matrices orthogonales :
a. de taille 2 ;
b. de taille 3 ;
c. de taille n.

6 Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\det M = 1$.
Est-ce la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$?

7 On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté. Rappeler la formule donnant l'image $r_{\theta,k}(x)$ du vecteur x par la rotation d'axe dirigé par k et d'angle θ.

8 Comment détermine-t-on l'angle d'une rotation d'un espace euclidien de dimension 3 ?

9 En séparant le cas des rotations du plan et de l'espace, répondre aux questions suivantes :
a. deux rotations commutent-elles ?
b. quand on compose les rotations, les angles s'ajoutent-ils ?
c. l'angle entre un vecteur et son image est-il égal à l'angle de la rotation ?

10 **a.** Quelle est la composée de deux réflexions du plan euclidien ?
b. Quelle est la composée de deux réflexions de l'espace euclidien de dimension 3 ?

11 Comment voit-on sur une matrice qu'elle est symétrique ? qu'elle est la matrice d'une symétrie ? Que peut-on dire si elle a les deux propriétés simultanément ?

12 La réciproque du théorème spectral est-elle vraie ?

13 Récapituler les différentes méthodes de preuve de diagonalisabilité connues.

Savoir appliquer le cours

1 (PSI) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire canonique.
Quel est l'adjoint de l'endomorphisme de dérivation ?

2 (PSI) **a.** Établir, pour un endomorphisme u de l'espace euclidien E, les relations $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
b. En déduire l'adjoint d'un projecteur de E (non nécessairement orthogonal).

3 **a.** Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$.
Montrer que si F est un sous-espace de E stable par u, alors F et $F^\perp$ sont globalement invariants par u : $u(F) = F$, $u(F^\perp) = F^\perp$.
b. Faire la liste des automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, classés en fonction de leurs valeurs propres.

4 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit un projecteur orthogonal.

5 Soit L une matrice ligne non nulle de taille n.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
a. Quelle est la nature de l'ensemble $F = \{X \in \mathbb{R}^n,\ LX = 0\}$?
b. Quelle est la matrice P de la projection orthogonale sur F ?
Indiquer quelques propriétés de P qu'on peut facilement contrôler.
c. Traiter le cas $n = 3$, $L = (1\ \ -2\ \ 1)$.

6 Expliquer pourquoi un endomorphisme u trigonalisable est trigonalisable en base orthonormale.

7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B = A + {}^tA$.
On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 0$.
Montrer que A est antisymétrique.