

7 – Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

Avant la colle

Tester ses connaissances

- | | |
|---|--|
| <p>● 1 Soit u un endomorphisme.
Déterminer $P(u)$ dans les cas suivants :</p> <ul style="list-style-type: none">• le polynôme P est une constante ;• le polynôme P vaut $P = X$. <p>● 2 Donner une définition des projecteurs et des symétries en termes de polynôme annulateur.</p> <p>● 3 Comparer les espaces propres d'un endomorphisme u et d'un polynôme en u : $P(u)$.</p> <p>● 4 Soient P un polynôme et u un endomorphisme de E. Les propositions « u est diagonalisable » et « $P(u)$ est diagonalisable » sont-elles équivalentes ?</p> <p>● 5 (PSI) Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension n.
Peut-on trouver un polynôme P annulateur de u non nul et tel que $P(0) = 0$?</p> <p>● 6 a. (PSI) L'idéal annulateur d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut-il être réduit à $\{0\}$?</p> | <p>● b. Même question pour un endomorphisme d'un espace vectoriel E.</p> <p>● 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Récapituler les propriétés connues sur les racines, les multiplicités et le degré :</p> <ul style="list-style-type: none">a. du polynôme caractéristique de A ;b. d'un polynôme annulateur de A ;c. (PSI) d'un générateur de l'idéal annulateur de A. <p>On pourra dans chaque cas indiquer si l'hypothèse « A diagonalisable » permet d'ajouter des informations.</p> <p>● 8 (PSI) Expliciter le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.</p> <p>● 9 On suppose que M a pour polynôme caractéristique $(3-x)^{212}(4-x)^{451}$. Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de M facile à mettre en œuvre.</p> |
|---|--|

Savoir appliquer le cours

1 Montrer que les ensembles suivants sont des idéaux de $\mathbb{C}[X]$ et en donner un générateur.

- a. L'ensemble des polynômes nuls en 1.
- b. L'ensemble des polynômes P tels que :
 $P(0) = P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 0$.

2 (PSI) L'ensemble des polynômes dont la dérivée s'annule en 0 est-il un idéal ?

3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^5 = I$.

- a. M est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?
- b. Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité sur \mathbb{R} .

4 Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$M(M - 3I) = 0.$$

Faire l'inventaire des possibilités pour le spectre, le polynôme caractéristique et l'idéal des polynômes annulateurs de M .

5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si A est trigonalisable, alors, pour tout polynôme P , $P(A)$ est trigonalisable.

6 a. (PSI) Quel est l'idéal annulateur de l'homothétie de rapport $\lambda \neq 0$?

b. Quel est l'idéal annulateur d'un projecteur ?

c. Quel est celui de l'endomorphisme de dérivation D de $\mathbb{K}_n[X]$?

7 Soient deux matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ annulant toutes deux le polynôme :

$$P(X) = X^2 - 3X + 2.$$

Peut-on dire qu'elles sont semblables ?

8 a. Calculer les puissances successives de

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b. Exhiber un polynôme annulateur de M de degré 2.

c. Sans calcul, déterminer les valeurs propres de M .

9 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$ et admettant au moins -1 et 1 pour valeurs propres.

Montrer que A est diagonalisable.