

6 – Polynôme caractéristique

Avant la colle

Tester ses connaissances

- | | |
|---|--|
| <p>● 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.</p> <p>a. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples. Quelles propriétés de A peut-on en déduire ?</p> <p>b. Si A est diagonalisable, son polynôme caractéristique est-il scindé à racines simples ?</p> <p>● 2 a. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale, comparer multiplicité des valeurs propres et dimension des espaces propres.</p> <p>b. Cette propriété est-elle vraie pour une matrice triangulaire ?</p> <p>● 3 a. Soient A et B deux matrices semblables. Comparer les propriétés de A et de B : trace, rang, déterminant, éléments propres.</p> <p>b. Même question avec ${}^t A$ et A.</p> <p>● 4 Pour une matrice triangulaire, indiquer ce que valent les valeurs propres, les multiplicités, la trace et le déterminant.</p> | <p>Le lien obtenu entre valeurs propres et déterminant est-il propre aux matrices triangulaires ?</p> <p>● 5 Pourquoi une matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ admet-elle au moins une valeur propre (réelle) et un vecteur propre associé ?</p> <p>● 6 a. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension n, ayant pour seule valeur propre λ. Que peut-on dire de χ_u ?</p> <p>b. Même question pour un endomorphisme d'un espace vectoriel réel.</p> <p>● 7 a. La connaissance du polynôme caractéristique suffit-elle pour déterminer si une matrice est diagonalisable ?</p> <p>b. (PC/PT) Même question pour « trigonalisable ».</p> <p>● 8 (PC/PT) Si une matrice réelle est trigonalisable, que peut-on dire de son spectre complexe ? La réciproque est-elle vraie ?</p> |
|---|--|

Savoir appliquer le cours

1 On prend pour corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a. Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Étudier la diagonalisabilité des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ (avec la matrice A de la question précédente).

2 Que peut-on dire des valeurs propres :

a. d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\det M < 0$?

b. de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\det M < 0$?

3 Soient deux complexes a, b . La matrice

$T = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

4 a. Quelles sont les valeurs propres (réelles et complexes) d'une rotation de l'espace \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique ?

b. La matrice représentative de cette rotation est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ?

5 a. Quel est le lien entre le polynôme caractéristique de A et celui de $3A$?

Comparer les valeurs propres et les multiplicités pour ces deux matrices.

b. Si A est inversible, même question pour A et A^{-1} .

6 Sans poser aucun calcul, trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$