5 – Déterminants

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 PSI On considère le cycle $c = (3, 1, 5, 4)$ appartenant à $\mathfrak{S}_6$.
Donner la représentation de c en utilisant la notation usuelle des permutations.

2 PSI Les permutations

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

sont-elles des cycles ?

3 PSI Soient un entier $n \geqslant 2$ et σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. On sait que l'on peut décomposer σ comme produit de p transpositions.

a. Le nombre p de termes de cette décomposition est-il bien déterminé ?

b. A-t-on (ou peut-on se ramener à) $p \leqslant n$?

4 Donner un exemple de forme bilinéaire alternée sur l'espace $\mathbb{R}^3$ (autre que l'application nulle).

5 Si f est une forme k-linéaire sur E, a-t-on une formule simple pour exprimer :

a. $f(x_1 + x'_1, \dots, x_k + x'_k)$ (les x_i et les x'_i étant des vecteurs de E) ?

b. $f(ax_1, \dots, ax_k)$ (les x_i étant des vecteurs de E et a un scalaire) ?

6 Soit $\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1.
Quelle est la structure algébrique de $\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{K})$?

7 Rappeler les trois opérations élémentaires, leur effet sur le rang et le déterminant.

8 Dans un espace vectoriel réel orienté de dimension 3, on considère une base directe (i, j, k). Dresser la liste des bases obtenues en permutant ces trois vecteurs et dire lesquelles sont directes.

9 Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E (chacun de dimension au moins 1). Soit u un endomorphisme de E.
Relier le déterminant de u et celui des endomorphismes induits sur F et G.

10 Écrire :

a. l'expression générale de la solution d'un système de Cramer de taille 2×2 ;

b. l'expression générale de l'inverse d'une matrice 3×3 inversible.

11 **a.** Quelle est la « bonne » méthode pour calculer un déterminant ?

b. PSI Quelle est la « bonne » méthode pour calculer l'inverse d'une matrice carrée ?

Savoir appliquer le cours

1 PSI Soit $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

a. Calculer σ^{-1} et σ^2.
b. Quelle est la signature de σ ?

2 PSI Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
a. Montrer qu'il existe un entier $k > 0$ tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$.
b. Chercher un tel entier k dans le cas où

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

3 PSI Soit $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

a. Compter les paires en inversion et donner la signature de σ.
b. Décomposer σ en produit de transpositions et retrouver la valeur de sa signature.
c. Comparer, pour une permutation générale, l'efficacité de ces deux méthodes de calcul de la signature.

4 Soit ϕ une forme 7-linéaire alternée sur un espace vectoriel E.
Montrer que, pour sept vecteurs X, Y, Z, T, U, V, W de E,

$$\phi(T, W, Z, X, V, U, Y) = -\phi(X, Y, Z, T, U, V, W).$$

5 Calculer $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 26 & 28 \\ 1\,973 & 1\,976 & 1\,979 \end{vmatrix}$

6 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Soient $x_1, \ldots, x_n$, n vecteurs de E.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(u(x_1), \ldots, u(x_n))$ soit une base de E.

7 **a.** Soit n un entier impair. Montrer que l'équation $M^2 = -\mathrm{I}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n'admet pas de solution.
b. Montrer que si n est pair, il existe au moins une solution.

8 Comment $\det M$ est-il modifié si l'on ajoute α au coefficient d'indice (i, j) ?

9 Quel est le déterminant de la matrice de terme général $(-1)^{i+j}$?

10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et B une base de E.
a. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans E.
Montrer que :

$$d : t \mapsto \det_B(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que si les fonctions x_i sont de classe $\mathscr{C}^k$, alors d l'est également.
c. PSI On suppose que les fonctions x_i sont de classe $\mathscr{C}^1$, montrer :

$$d'(t) = \det_B(x_1'(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) + \cdots + \det_B(x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t), x_n'(t)).$$