4 – Éléments propres, diagonalisabilité

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme u, peut-on avoir $u - \lambda \mathrm{Id}$ surjective ?

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fixe un réel α quelconque. Quand on résout le système $AX = \alpha X$, qu'obtient-on comme espace solution ?

3 Soient deux matrices A et B. À quelle condition :
- sont-elles deux matrices représentatives d'une même application linéaire ?
- sont-elles deux matrices représentatives d'un même endomorphisme ?

4 Pour une matrice diagonale (respectivement triangulaire), le rang est-il égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls ?

5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que la seule valeur propre de A est λ.
À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

6 Quelles sont les matrices semblables à une matrice scalaire λI ?

7 Soit T un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui diminue le degré des polynômes : pour tout polynôme P, $\deg(T(P)) \leqslant \deg P$.
Expliquer pourquoi T est trigonalisable.

8 Donner un exemple :

a. de matrice trigonalisable non diagonalisable ;

b. de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ diagonalisable ayant strictement moins de n valeurs propres ;

c. de matrice non trigonalisable.

9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre (réelle) de A. On note E_λ l'espace propre associé et F_λ l'espace propre complexe associé.
Si on dispose d'une base de E_λ, comment obtient-on une base de F_λ ?

10 La somme de deux endomorphismes diagonalisables est-elle diagonalisable ?

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

1 **a.** Quels sont les éléments propres de l'endomorphisme de dérivation sur $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$?
b. Même question pour $E = \mathbb{R}[X]$.
c. On note, pour un réel a, e_a l'application $e_a : x \mapsto \exp(ax)$.
Que peut-on dire de la famille $(e_a)_{a \in \mathbb{R}}$?

2 Soit l'endomorphisme ψ de $\mathbb{K}[X]$ donné par $\psi(P) = XP'$.
a. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par ψ. On notera ψ_n l'endomorphisme induit.
b. Montrer que ψ_n est diagonalisable.
c. Donner tous les éléments propres de ψ.

3 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Exhiber une valeur propre et un vecteur propre évidents.
Quel est l'espace propre associé ?
b. Calculer le rang de $B = A + \mathrm{I}$.
En déduire une nouvelle valeur propre et donner l'espace propre associé.
c. Supposons qu'il existe une matrice D diagonale et semblable à A.
Que vaut D ?
d. Montrer que A est bien diagonalisable.

4 **a.** Une rotation plane d'angle $\theta \in]0, \pi[$ est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
b. Même question pour une rotation de l'espace euclidien de dimension 3.

5 On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de réels. On définit pour une suite $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E les suites décalées vers la droite et la gauche :

$$L(U) = (u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \ldots),$$
$$R(u) = (0, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, \ldots).$$

a. Vérifier que L et R sont des endomorphismes de E.
b. Donner les éléments propres de L.
Même question pour ceux de R.

6 Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

7 **a.** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose que u admet deux valeurs propres distinctes. Montrer que u est trigonalisable.
b. Exemple : trigonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

8 **a.** Montrer que $u : P \mapsto (X-1)P'(X)$ est un endomorphisme trigonalisable de $\mathbb{K}_n[X]$.
b. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

9 Soit u un endomorphisme sur un espace de dimension finie. Si l'on prend des sous-espaces des espaces propres de u et que l'on en fait la somme, le résultat est un espace stable par u.
Tout espace stable par u est-il nécessairement de ce type ?

10 Soit E un espace vectoriel. Soient u et f deux endomorphismes de E, u étant bijectif.
Comparer les éléments propres de f et ceux de $f' = u^{-1} \circ f \circ u$.

© Nathan, *classe prépa*