3 – Produits scalaires

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Soient E un espace vectoriel réel, f, une forme bilinéaire sur E, et g, une application linéaire de E^2 dans $\mathbb{K}$. Comment se développent les expressions suivantes :

a. $f(\alpha x, \alpha y)$,

b. $g(\alpha x, \alpha y)$,

c. $f(x + x', y + y')$,

d. $g(x + x', y + y')$?

2 Deux plans de l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien peuvent-ils être orthogonaux ?

3 PSI Soit E un espace hermitien admettant la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ pour base orthonormale. Quelle est sa base duale ?

4 PC/PSI Soient des complexes $z_1, \ldots, z_n$, non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de leur module soit égale au module de leur somme.

5 La norme $\| \|_1$ sur $\mathbb{R}^2$ est-elle issue d'un produit scalaire ?

6 PC/PSI Soit E un espace préhilbertien complexe de dimension 3, ramené à une base orthonormale (e_1, e_2, e_3). Quelle est la valeur de la norme du vecteur $x = 2e_1 + (1+i)e_2 - ie_3$ dans cette base ?

7 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels stricts d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3. On suppose que F et G ne sont pas orthogonaux. On cherche s'il existe $f \in F$ et $g \in G$, non nuls et orthogonaux.

a. Citer un exemple où il existe effectivement de tels vecteurs.

b. Citer un exemple où il n'en existe pas.

8 On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire canonique. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes avec, pour tout entier n, $\deg P_n = n$.
Quel résultat obtient-on en appliquant l'algorithme de Schmidt à cette famille ?

9 Quel résultat donnerait l'application de l'algorithme d'orthogonalisation sur une famille liée ?

10 **a.** On considère un espace vectoriel préhilbertien réel. Montrer qu'une des formules de polarisation permet d'obtenir l'équivalence :
$\|u\| = \|v\| \iff (u+v)$ orthogonal à $(u-v)$.

b. De quelle propriété classique de géométrie euclidienne s'agit-il ?

11 Peut-on définir l'angle de deux vecteurs non nuls dans l'espace euclidien orienté de dimension 3 ?

12 On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique. Soit P un plan affine d'équation $ax + by + cz = d$. Quel est le sens géométrique à donner à la constante $|d|$?

Savoir appliquer le cours

1 **a.** Montrer que la famille $((x \mapsto e^{imx})_{m\in\mathbb{Z}})$ est libre dans $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b. Montrer que la famille :
$((x \mapsto \cos(mx))_{m\in\mathbb{N}}, (x \mapsto \sin(mx))_{m\in\mathbb{N}^*})$
est libre dans $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2 Soit $(\ ,\ )$ un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel E. Soit u un endomorphisme de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application définie par $\langle x|y\rangle = (u(x), u(y))$ constitue un produit scalaire sur E.

3 PC/PSI Sur $E = \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{C})$, les expressions suivantes définissent-elles un produit scalaire ?

a. $f(h, k) = \int_a^b \overline{h(t)}k(t)\mathrm{d}t$

b. $g(h, k) = \int_a^b \overline{h'(t)}k'(t)\mathrm{d}t$

c. $G(h, k) = g(h, k) + \overline{h(0)}k(0)$.

4 Dans $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, quel est l'orthogonal du sous-espace des fonctions constantes ?

5 Dans l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, on note respectivement S_0 et A les sous-espaces des matrices symétriques de trace nulle et antisymétriques.

Montrer que $S_0 \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(\mathrm{I}) \overset{\perp}{\oplus} A = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6 Soit E l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $2x - 3y + 5z = 0$.

7 Soit E l'espace $\mathbb{C}[X]$ muni du produit scalaire canonique.
On note :
$F = \mathrm{Vect}(1 + X, 1 + X^2, \ldots, 1 + X^n, \ldots)$.

a. Montrer que F est un hyperplan et en donner un supplémentaire.

b. Montrer que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

8 Soient deux réels a, b fixés. Chercher le minimum de $(m-a)^2 + (m-b)^2$ pour $m \in \mathbb{R}$. On procédera d'abord de façon élémentaire, puis en s'efforçant de reconnaître un problème de projection.

9 **a.** Soit ℓ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\ell(P) = P'(2)$. Si l'on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire canonique, quel est le vecteur canoniquement associé ?

b. PC/PSI Même question sur $\mathbb{C}_n[X]$ canonique, avec la forme linéaire $\ell' : P \mapsto P(j)$.

10 PC/PSI Montrer, pour tous complexes $(z_1, \ldots z_n)$, $\left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^2 \leqslant n\sum_{i=1}^n |z_i|^2$,

avec égalité si et seulement si tous les complexes z_i sont égaux.

11 PC/PSI Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel. Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille orthogonale, elle vérifie la relation de Pythagore. La réciproque est-elle vraie ?

12 Dans l'espace $\mathbb{C}[X]$ muni du produit scalaire canonique, peut-on définir la distance de $\mathrm{i}X + 2$ au sous-espace des polynômes pairs ?