

# 1 – Sommes directes et projecteurs

## Avant la colle

### Tester ses connaissances

Dans les questions suivantes,  $E$  est un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2 sur  $\mathbb{K}$ , et  $F, G, H$  en sont des sous-espaces vectoriels.

- 1 On suppose que  $E = F \oplus G$ .  
Soit un élément  $x$  de  $E$  tel que  $x \notin F$ .  
Que peut-on dire de  $x$  ?
- 2 On suppose que  $E = F \oplus G$ .  
Peut-on dire que  
 $H = (F \cap H) \oplus (G \cap H)$  ?
- 3 Dans l'espace  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  on définit pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  l'application  $e_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ . Comment s'écrit un élément de l'espace vectoriel engendré par la famille  $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$  ?
- 4 Si  $(B)$  est une famille libre de  $F$  et  $(B')$  une famille libre de  $G$ , avec  $F \cap G = \{0\}$ ,  $(B, B')$  est-elle une famille libre de  $F + G$  ?
- 5 Si  $F \oplus G = F \oplus H$ , a-t-on nécessairement  $G = H$  ?
- 6 a. L'ensemble des projecteurs de  $E$  est-il un espace vectoriel ?  
b. Un groupe pour la loi  $\circ$  ?
- 7 Soit  $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{C})$ . Pourquoi peut-on parler de l'image et du noyau de  $A$  ?

De quel espace l'image et le noyau sont-ils des sous-espaces ?

- 8 Quels sont les espaces stables par un quart de tour de l'espace euclidien orienté de dimension 3 ?  
Quels sont les endomorphismes induits ?
- 9 (PSI) Quelle est la base duale de la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  ?
- 10 Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . Soit  $D$  l'endomorphisme de dérivation  $P \mapsto P'$ . Soit  $F$  le sous-espace vectoriel des polynômes pairs.  
Que peut-on dire de l'endomorphisme induit par  $D$  sur  $F$  ?
- 11 On suppose que  $E$  est de dimension finie et que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .  
a. Quel est l'aspect de la matrice représentative de  $u$  dans une base adaptée à  $\text{Ker } u$  ?  
b. Et dans une base adaptée à  $\text{Im } u$  ?
- 12 On suppose que  $E$  est de dimension finie, muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Si l'endomorphisme  $u$  de  $E$  admet une matrice représentative de la forme  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ , avec  $A$  et  $C$  matrices carrées.  
c. Quelle propriété peut-on en déduire ?  
d. Que dire de plus si  $B = 0$  ?

## Savoir appliquer le cours

- 1 a.** Décrire la somme de deux droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$ , et donner la condition pour laquelle cette somme est une somme directe.  
**b.** Même question avec deux plans vectoriels.
- 2** Soient  $F, G, H$  des sous-espaces vectoriels d'un espace  $E$  et tels que :  
 $F \cap G = H \cap (F + G) = \{0\}$ .  
 Montrer que la somme  $F + G + H$  est directe.
- 3** Soient  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels non nuls d'un espace vectoriel  $E$ , en somme directe.  
 Montrer que toute famille de vecteurs non nuls  $(f_1, \dots, f_n)$ , appartenant respectivement à  $F_1, \dots, F_n$ , est libre.
- 4** On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $n$ ,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  les sous-espaces respectivement formés des matrices symétriques et antisymétriques.  
 Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et donner les projecteurs associés à cette décomposition, ainsi qu'une base adaptée.
- 5** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si  $P$  est un polynôme  

$$P = \sum_{i=0}^k a_i X^i, \text{ on note } P(M) = \sum_{i=0}^k a_i M^i.$$
 Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  non nul, de degré inférieur à  $n^2$ , tel que  $P(M) = 0$ .
- 6** Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs non nuls d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.  
 Montrer que  $p + \sqrt{2}q$  n'est pas un projecteur.
- 7** On note  $e_1, \dots, e_4$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{C}^4$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ . On suppose que l'endomorphisme  $a$  canoniquement associé laisse stable  $\text{Vect}(e_2, e_4)$ . Que peut-on dire de  $A$ ? de l'endomorphisme induit par  $a$  sur  $\text{Vect}(e_2, e_4)$  ?
- 8** Soit  $r < p$ .  
 Que vaut le produit de :  

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix} \text{ par } B = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} ?$$
- 9** Parmi ces deux matrices :  

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$
 on admet qu'il y a une matrice représentative d'une rotation. Laquelle est-ce ? Que peut-on dire de l'angle de cette rotation ?
- 10** Soit  $u$  endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$  laissant stable le sous-espace vectoriel  $F$ . Soit  $p$  un projecteur d'image  $F$ .  
**a.** Pour un vecteur  $x$  de  $E$ , simplifier l'expression  $(p \circ u \circ p)(x)$ .  
**b.** Que devient cette expression si l'on suppose que l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  est l'application identique ?