15 – Géométrie affine et euclidienne

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace affine de E.

b. Un sous-espace affine de E est un sous-espace vectoriel de E.

c. Un sous-espace affine de E passant par O est un sous-espace vectoriel de E.

d. Un plan affine de E peut être parallèle à une droite affine de E.

e. Une droite affine de E peut être parallèle à un plan affine de E.

f. Si deux plans affines de E sont parallèles, ils sont disjoints ou égaux.

g. Deux droites affines de E parallèles à un même plan affine de E sont parallèles.

h. Deux droites affines de E parallèles à une même droite affine de E sont parallèles.

i. L'image d'un sous-espace affine de E par une application affine de E dans F est un sous-espace affine de F.

2 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ des sous-espaces affines de E de directions respectives V et W et contenant respectivement les points A et B.

a. Montrer que $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ si et seulement si $(V \subset W \text{ et } \overrightarrow{AB} \in W)$.

b. Montrer que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \varnothing$ si et seulement si $(\overrightarrow{AB} \in V + W)$.

c. Montrer que si $E = V + W$ alors $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \varnothing$.

3 E est un espace vectoriel, f et g sont des applications affines de E dans E.
Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?

a. A : f est une translation et $B : \vec{f} = \mathrm{Id}$.

b. $A : f = g$ et $B : \vec{f} = \vec{g}$.

c. $A : f = g$

et $B : \vec{f} = \vec{g}$ et $\exists \Omega \in E$ tel que $f(\Omega) = g(\Omega)$.

4 **a.** La partie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle convexe ?

b. La partie $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle convexe ?

5 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. La seule translation de E admettant un point fixe est l'identité.

b. Une rotation admet un unique point fixe qui est son centre.

c. Une projection orthogonale est une isométrie de E.

d. La composée de deux rotations de E est une rotation de E.

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

1 Démontrer le corollaire 1.

2 Soient A, B et C trois points d'un espace affine E et soit

$$f : E \to E$$
$$M \mapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

Quelle est la nature de f ?

3 Démontrer la proposition 6.

4 On se place dans $\mathbb{R}^2$, soit D la droite d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.
Déterminer l'expression analytique de la projection p sur D de direction celle de $\vec{u} = (-1, 1)$.

5 Dans $\mathbb{R}^2$, on considère h_1 l'homothétie de centre Ω_1 et de rapport k et h_2 l'homothétie de centre Ω_2 et de rapport $\frac{1}{k}$ (où $k \in \mathbb{R}^*$).

a. Montrer que $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont des translations.

b. Peut-on avoir $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$?

6 Dans $\mathbb{R}^2$, soient les points $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $A' = (1, 1)$ et $B' = (-2, 5)$.
Déterminer la similitude s qui transforme A en A' et B en B'.

© Nathan, *classe prépa*