

14 – Espaces vectoriels euclidiens

Avant la colle

Tester ses connaissances

- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?</p> <p>a. Le produit scalaire du vecteur nul et de tout vecteur est nul.</p> <p>b. Seul le vecteur nul est orthogonal à lui-même.</p> <p>c. Il y a un unique produit scalaire sur un \mathbb{R}-espace vectoriel E.</p> <p>d. Plusieurs produits scalaires sur un \mathbb{R}-espace vectoriel E peuvent avoir la même norme associée.</p> <p>e. Une famille orthogonale est nécessairement libre.</p> <p>f. Une famille orthonormale est nécessairement libre.</p> <p>g. Une projection orthogonale est un automorphisme orthogonal.</p> <p>h. Dans un espace euclidien E, $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.</p> <p>i. Soit un \mathbb{R}-espace vectoriel E et soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme symétrique, si φ est linéaire à gauche, elle est bilinéaire.</p> | <p>2 Soient x et y deux vecteurs d'un espace euclidien E.
Peut-on avoir $\ x + y\ = \ x\ + \ y\$?</p> <p>3 E est un espace euclidien, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Les propositions A et B suivantes sont-elles équivalentes, l'une implique-t-elle l'autre ?</p> <p>a. $A : F \perp G$ et $B : F = G^\perp$.</p> <p>b. $A : F \perp G$ et $F + G = E$ et $B : F = G^\perp$.</p> <p>4 Dans l'espace euclidien de dimension 3, un automorphisme orthogonal peut-il à la fois être une rotation et une réflexion ? Un automorphisme orthogonal peut-il à la fois être une rotation et une symétrie ?</p> <p>5 E est un espace euclidien de dimension 2 ou 3, u est un endomorphisme de E.
Les propositions A et B suivantes sont-elles équivalentes, l'une implique-t-elle l'autre ?</p> <p>a. $A : u \in \mathcal{O}(E)$ et $B : \det(u) \in \{-1, 1\}$.</p> <p>b. $A : u \in \mathcal{O}(E)$ et $\det(u) = 1$ et $B : u$ est une rotation.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

© Nathan, classe prépa

Savoir appliquer le cours

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1 Démontrer la proposition 3.</p> <p>2 Démontrer le deuxième côté de l'inégalité triangulaire.</p> <p>3 Soit E un \mathbb{R}-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté (\mid).
Soit u une application de E dans E qui conserve le produit scalaire, montrer que u est linéaire.
(on pourra développer $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ u(\lambda x + \mu y) - (\lambda u(x) + \mu u(y))\ ^2$.)</p> <p>4 Soit E un espace euclidien de dimension n.</p> <p>a. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E, soit $p \in \mathbb{N}, 1 \leq p < n$ et soient</p> | <p>$F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Montrer que F et G sont des supplémentaires orthogonaux de E.</p> <p>b. Soient F et G des supplémentaires orthogonaux de E, soit (f_1, \dots, f_p) une base orthonormale de F et soit (g_1, \dots, g_q) une base orthonormale de G, montrer que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base orthonormale de E.</p> <p>5 Démontrer la proposition 5, et le corollaire 3.</p> <p>6 Soit E un espace euclidien, on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
Montrer que $T : E \rightarrow E^*$ telle que $\forall x \in E, a \mapsto \varphi$
$\varphi(x) = (x \mid a)$ est un isomorphisme.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|