13 – Déterminants et systèmes d'équations linéaires

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Déterminer tous les cycles d'ordre 3 de S_4.
Toutes les permutations de S_4 sont-elles des cycles ?

2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Le produit scalaire est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

b. L'application $\varphi \; : \; (x, y) \mapsto (2xy,\ x^2y^2)$ est bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

c. Le produit vectoriel est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$.

d. L'application $\varphi \; : \; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \ldots x_n$ est une forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$.

3 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

b. Si $\mathcal{B}$ est une base de E alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

c. Le déterminant de Id_E est égal à 1.

d. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\det(u) = 1$ alors $u = \mathrm{Id}_E$.

e. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\det(u) = 1$ alors $u \in \mathcal{GL}(E)$.

f. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\forall \lambda \in K$, $\det(\lambda u) = \lambda \det(u)$.

4 On considère $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les propositions A et B sont-elles équivalentes, l'une implique-t-elle l'autre ?

a. A : $\det(M) = 0$
et B : une des colonnes de M est nulle.

b. A : $\det(M) = 0$
et B : deux colonnes de M sont proportionnelles.

c. A : $\det(M) = 0$
et B : une des colonnes de M est combinaison linéaire des autres colonnes.

5 Le déterminant d'une matrice carrée est une forme n-linéaire alternée de ses vecteurs lignes.

☐ **a.** Vrai ☐ **b.** Faux

6 On considère (S) un système de n équations à n inconnues.
Les propositions P et Q sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?

a. P : (S) est un système de Cramer
et Q : (S) admet au moins une solution.

b. P : (S) est un système de Cramer
et Q : (S) admet une unique solution.

7 Soient les vecteurs : $\begin{cases} u = (-2,\ 3,\ 1) \\ v = (2,\ 0,\ 1) \\ w = (-1,\ 1,\ 1) \end{cases}$

(u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Savoir appliquer le cours

1 Montrer que si $n \geqslant 3$, le groupe S_n n'est pas commutatif.

2 Démontrer le corollaire 1.

3 Écrire la démonstration de la proposition 5 et du théorème 2 en dimension 2.

4 Calculer les déterminants des matrices suivantes (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) et préciser si elles sont inversibles :

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ **b.** $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

5 Démontrer le corollaire 5.

6 Soit le système $(S) : \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + 7y = -1 \end{cases}$

a. Montrer que (S) est un système de Cramer.
b. Résoudre (S) à l'aide des formules de Cramer.

7 Soit le système $(S) : \begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 3x - 2z = -7 \\ -x + y + z = 6 \end{cases}$

a. (S) est-il un système de Cramer ?
b. Résoudre (S).