

12 – Matrices

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Une colonne d'une matrice $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un vecteur de \mathbb{R}^p .

b. Une ligne d'une matrice $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un vecteur de \mathbb{R}^p .

c. Une matrice non nulle n'a pas de coefficient nul.

d. Toute matrice carrée admet un inverse.

e. Les matrices diagonales sont les matrices carrées à la fois triangulaires inférieures et triangulaires supérieures.

f. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication matricielle est commutative.

g. Le produit d'une matrice par une matrice nulle est nul.

h. Si A et B sont des matrices telles que $A \times B$ soit défini, alors $A \times B = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$

i. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \times B = 0 \Leftrightarrow (B = 0)$

j. Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est inférieur ou égal à p et à n .

k. La transposée d'un produit de matrices est le produit des transposées de ces matrices.

l. L'inverse d'un produit de matrices inversibles est le produit des inverses de ces matrices.

2 Préciser la base canonique de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

3 Calculer le produit $A \times B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. La matrice de Id_E relativement à un couple de bases de E est I_n .

b. La matrice de Id_E relativement à une base de E est I_n .

c. La matrice d'un automorphisme de E relativement à un couple de bases de E est inversible.

d. La matrice d'un automorphisme de E relativement à une base de E est inversible.

5 Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?

a. $A : P$ est inversible.

$B : P$ est de rang n .

b. $A : P$ est inversible.

$B : \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, P \times X = 0 \Rightarrow X = 0$

c. $A : P$ est inversible.

$B : \text{Aucune colonne de } P \text{ n'est nulle.}$

d. $A : P$ est inversible.

$B : \text{L'endomorphisme de } \mathbb{K}^n \text{ canoniquement associé à } A \text{ est un automorphisme.}$

6 a. Soient A et B deux matrices diagonales, que vaut le produit $A \times B$?

b. Si D est une matrice diagonale, que vaut D^p pour $p \in \mathbb{N}$?

7 Justifier que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont égales si et seulement si :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p, AX = BX.$$

Savoir appliquer le cours

1 Démontrer la proposition 8.

2 a. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, et soit u l'endomorphisme

de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à A . Déterminer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x, y)$.

b. Soit v l'application linéaire définie de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 par :

$$v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (3x - 2y + z, 5x - z)$$

Déterminer la matrice de v relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .

c. Déterminer la matrice dans la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$ de $\varphi : E \rightarrow E$

$$P \mapsto P' + P$$

3 1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r , et soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A .

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p supplémentaire de $\text{Ker } u$.

a. Justifier que F est de dimension r et que, si (e_1, \dots, e_r) est une base de F , alors $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im } u$.

b. Montrer qu'il existe des bases \mathcal{B}'_p et \mathcal{B}'_n de \mathbb{K}^p et de \mathbb{K}^n telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_p, \mathcal{B}'_n} u = J_r$, où

$$J_r = \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_p \Bigg\}_n \text{ est la matrice définie dans}$$

la proposition 21.

2. Démontrer la proposition 21.

3. Démontrer le corollaire 2.

4 Déterminer le rang des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ -12 & 3 & -14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 - m \\ 1 + m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

5 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse grâce à la méthode du pivot de Gauss.

b. En remarquant que

$$\forall \left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \in (\mathbb{R}^3)^2,$$

$$AX = Y \iff (X = A^{-1}Y)$$

calculer à nouveau A^{-1} .

6 Déterminer des bases de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

7 On introduit une notion qu'il est bon de connaître : deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme d'un espace E de dimension n dans des bases différentes.

Attention, il faut bien comprendre « des bases différentes » et non « des couples de bases différents ».