10 – Espaces vectoriels

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. E est un sous-espace vectoriel de E.

b. $\varnothing$ est un sous-espace vectoriel de E.

c. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

d. Un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0_E\}$ peut avoir un nombre fini d'éléments.

2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $0_E \in F$.

b. Si $x \in F$, alors $2x \in F$.

c. Si $x \in F$ et $y \in E \backslash F$, alors $x + y \in E \backslash F$.

d. Si $x \in E \backslash F$ et $y \in E \backslash F$,
alors $x + y \in E \backslash F$.

e. Si $x \in E \backslash F$ alors $2x \in E \backslash F$.

f. $E \backslash F$ est un sous-espace vectoriel de E.

g. $F = E \iff E \subset F$

h. $F = \{0_E\} \iff \{0_E\} \subset F$

i. $F = \{0_E\} \iff F \subset \{0_E\}$

j. Si G est un sous-espace vectoriel de E inclus dans F, alors G est un sous-espace vectoriel de F.

3 Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit f une application linéaire de E vers E'.
Montrer que $f(0_E) = 0_{E'}$.

4 **1.** Les espaces suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

a. $\mathbb{R}^2$. **b.** $\mathbb{R}$. **c.** $\mathbb{C}$.
d. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. **e.** $\mathbb{Q}$.

2. Les espaces suivants sont-ils des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels ?

a. $\mathbb{R}$. **b.** $\mathbb{C}$. **c.** $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. **d.** $\mathbb{C}^{41}$.

5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

1. Soit $x \in E \backslash F$, peut-on affirmer que $x \in G$?

2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.

a. Montrer que
$\forall x \in E,\ x \in F \iff p(x) = x$.

b. Montrer que
$\forall x \in E,\ x \in G \iff p(x) = 0$.

6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit f une application de E dans E.
Si $f \circ f = f$, f est-elle nécessairement un projecteur ?

Savoir appliquer le cours

1 **a.** Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

2 Démontrer la proposition 7.

3 Démontrer les propositions 10 et 11.

4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
a. Que vaut $\text{Vect}(\varnothing)$?
b. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, que vaut $\text{Vect}(x)$?

6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
a. Montrer que $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.
b. $\mathscr{GL}(E)$ est-il un sous-anneau de $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$?

7 Démontrer les propositions 22 et 23.

8 Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $u \in \mathscr{L}(E, E')$.
Soit $b \in E'$, on s'intéresse à l'équation $u(x) = b$ d'inconnue $x \in E$.
a. Montrer que $u(x) = b$ admet au moins une solution si et seulement si $b \in \text{Im}\, u$.
b. Montrer que si $b \in \text{Im}\, u$ et si $x_0 \in E$ est une solution de $u(x) = b$, alors l'ensemble des solutions de $u(x) = b$ est $\{x_0 + k \mid k \in \text{Ker}\, u\}$.