9 – Fractions rationnelles

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Déterminer le degré des fractions rationnelles suivantes :

a. $\dfrac{X^2}{X^4+1}$. **b.** $\dfrac{1}{X^3+4X+2}$.

c. $\dfrac{1}{X-2}+\dfrac{1}{X-3}$. **d.** $\dfrac{1}{X-2}-\dfrac{1}{X-3}$.

2 Soit $F=\dfrac{P}{Q}\in\mathbb{K}(X)$, les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Si a est racine d'ordre n de Q, alors a est pôle d'ordre n de F.

b. Si a est racine d'ordre n de P, alors a est racine d'ordre n de F.

c. Si a est racine d'ordre n de Q et si $P(a)\neq 0$, alors a est pôle d'ordre n de F.

d. Si a est racine d'ordre n de P et si $Q(a)\neq 0$, alors a est racine d'ordre n de F.

3 Soit $F\in\mathbb{R}(X)$.
Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?

a. A : F est un polynôme non nul.
B : $\deg(F)\geqslant 0$.

b. A : La partie entière de F est nulle.
B : $\deg(F)<0$.

c. A : $\lim\limits_{x\to a}(F(x))=+\infty$. B : a est un pôle de F.

d. A : $\lim\limits_{x\to a}(|F(x)|)=+\infty$. B : a est un pôle de F.

4 Écrire sous forme irréductible les fractions rationnelles suivantes :

a. $\dfrac{X^2-1}{X^4-1}$. **b.** $\dfrac{X-1}{X^n-1}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

c. $\dfrac{(X-a)^5}{(X^2+2X+3)^7}$ où $a\in\mathbb{R}$.

Savoir appliquer le cours

1 Vérifier que l'addition et le produit de deux fractions rationnelles F et G de $\mathbb{K}(X)$ sont indépendants des représentants de F et G choisis.

2 Calculer les parties entières des fractions rationnelles suivantes :

a. $F=\dfrac{X^6}{X^4-1}$. **b.** $G=\dfrac{X^5+X^4+1}{(X^2+1)^2}$.

c. $H=\dfrac{(X^2-1)^3}{(X^2+X+1)^7}$.

3 Démontrer la proposition 2.

4 Soient $P\in\mathbb{K}[X]$ et $a\in\mathbb{K}$, déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de $\dfrac{P}{(X-a)^3}$ en fonction des dérivées de P en a.

5 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de :

a. $F=\dfrac{1}{X^2-3X+2}$. **b.** $G=\dfrac{X^2}{X^4-1}$.

c. $H=\dfrac{X}{(X-1)^2}$.

6 Soit $P\in(\mathbb{C}[X])$ tel que $P\neq 0$, déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de $\dfrac{P'}{P}$.