8 – Polynômes

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.

b. Si A et B sont deux polynômes tels que A divise B, alors $\deg(A) \leqslant \deg(B)$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$.

d. Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ divise 0.

e. 1 divise tous les polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

f. Un polynôme de degré n admet n racines distinctes.

g. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, la somme des ordres de multiplicité des racines de P est inférieure ou égale au degré de P.

h. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, la somme des ordres de multiplicité des racines de P est égale au degré de P.

i. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

j. Soit Q le quotient de la division euclidienne de A par B où $\deg(A) \geqslant \deg(B)$, alors $\deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$.

2 Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?

a. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$:
A : α est racine de P d'ordre k.
B : $P = (X - \alpha)^k Q$, où $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(\alpha) \neq 0$.

b. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$:
A : $\deg(P) \leqslant n$. B : $P^{(n+1)} = 0$.

c. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$:
A : $\deg(P) = n$.
B : $P^{(n)} \neq 0$ et $P^{(n+1)} = 0$.

3 Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, montrer que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes.
i) P et Q sont associés.
ii) Les diviseurs de P sont les mêmes que les diviseurs de Q.
iii) Les multiples de P sont les mêmes que les multiples de Q.
iv) $P \mid Q$ et $\deg(P) = \deg(Q)$.

4 Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, dans quel(s) cas a-t-on $A \wedge B = 0$? Dans quel(s) cas a-t-on $A \vee B = 0$?

5 Écrire les relations coefficients-racines pour un polynôme scindé de degré 2, puis pour un polynôme scindé de degré 3.

6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

1. On sait que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.
Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de P ?

2. On sait que $P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$.
Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de P ?

7 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$, et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha \neq \beta$.
Déterminer en fonction de $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)(X - \beta)$.

Savoir appliquer le cours

1 Démontrer la proposition 5.

2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$, déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$, en déduire une démonstration simple de la proposition 11.

3 Soient $P_1, \ldots, P_n$ n polynômes de $\mathbb{K}[X]$ (où $n \geqslant 2$), montrer que :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} P_k\right)' = \sum_{k=1}^{n}\left(P_k' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} P_j\right).$$

4 Effectuer dans les deux cas suivants la division euclidienne de A par B :

a. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$
$B = X^2 - 3X + 1$

b. $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$
$B = X + 3$

5 Démontrer les propositions 14 et 15.

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, la décomposition en produit de facteurs irréductibles de $X^n - 1$.

7 Soit $A = X^3 - X^2 + X - 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

a. Montrer que $A \wedge B = 1$.

b. Déterminer deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.