7 – Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Tout entier relatif divise 0.

b. 0 divise tous les entiers relatifs.

c. Tout entier relatif divise 1.

d. 1 divise tous les entiers relatifs.

e. 1 n'est divisible que par lui-même.

f. 1 est un nombre premier.

g. La somme de deux diviseurs d'un entier est un diviseur de cet entier.

h. La somme de deux multiples d'un entier est un multiple de cet entier.

i. Si deux entiers se divisent mutuellement, ils sont égaux.

2 Soit $(a, d) \in \mathbb{N}^2$.

a. Montrer que si a est non nul et si d divise a, alors $d \leqslant a$.

b. Peut-on dire que tout diviseur d'un entier naturel est plus petit que cet entier ?

3 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
Montrer que si $d \in \mathbb{Z}$ divise a et b, alors $\forall (u, v) \in \mathbb{Z}^2$, d divise $au + bv$.

4 Soit $a \in \mathbb{N}^*$, déterminer $0 \wedge a$, $1 \wedge a$, $0 \vee a$ et $1 \vee a$.

5 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

a. On sait que $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $au + bv = 5$, peut-on en déduire que $a \wedge b = 5$?

b. On sait que $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $au + bv = 1$, peut-on en déduire que $a \wedge b = 1$?

6 Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants : 315, 770 et 468.
Calculer :

a. $315 \wedge 770$, **b.** $315 \wedge 468$,

c. $468 \wedge 770$, **d.** $315 \vee 770$,

e. $315 \vee 468$, **f.** $468 \vee 770$.

Savoir appliquer le cours

1 Démontrer les propositions 5, 6 et 7.

2 Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, soit $d = a \wedge b$ et soient a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
Que vaut $a \vee b$?

3 Soit $d = 528 \wedge 630$.
a. Déterminer d.
b. Déterminer deux entiers u et v tels que $528u + 630v = 6$.
c. Peut-on déterminer deux entiers u' et v' tels que $528u' + 630v' = 1$?

4 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $n! + k$ n'est pas un nombre premier.

5 Soit n un entier non premier strictement supérieur à 1, montrer que n admet un diviseur premier p tel que $p^2 \leqslant n$.

6 Justifier le fait que tout rationnel q admet un unique écriture irréductible $q = \dfrac{a}{b}$ où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge b = 1$.