

# 5 – Étude de l'ensemble $\mathbb{N}$ , ensembles finis

## Avant la colle

### Tester ses connaissances

<p><b>1</b> Soit <math>P</math> un prédicat défini sur <math>\mathbb{N}</math>.</p> <p><b>a.</b> Si l'on a <math>(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1))</math>, peut-on affirmer que <math>\forall n \in \mathbb{N}, P(n)</math> est vrai ?</p> <p><b>b.</b> Si l'on a <math>(P(0)</math> et <math>\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(n+1))</math>, peut-on affirmer que <math>\forall n \in \mathbb{N}, P(n)</math> est vrai ?</p> <p><b>c.</b> Si l'on a <math>(P(0)</math> et <math>\forall n \in \mathbb{N}, (P(n)</math> et <math>P(n+1)) \Rightarrow P(n+2))</math>, peut-on affirmer que <math>\forall n \in \mathbb{N}, P(n)</math> est vrai ?</p> <p><b>d.</b> Si l'on a <math>(P(0)</math> et <math>\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1))</math>, peut-on affirmer que <math>\forall n \in \mathbb{N}, P(n)</math> est vrai ?</p> <p><b>e.</b> Si l'on a <math>(P(1)</math> et <math>\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(n+1))</math>, peut-on affirmer que <math>\forall n \in \mathbb{N}, P(n)</math> est vrai ?</p> <p><b>f.</b> Si l'on a <math>(P(0)</math> et <math>\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k)) \Rightarrow P(n+1))</math>, peut-on affirmer que <math>\forall n \in \mathbb{N}, P(n)</math> est vrai ?</p>	<p><b>3</b> Soient <math>E</math> et <math>F</math> deux ensembles finis, et soit <math>f</math> une application de <math>E</math> dans <math>F</math>. Les propositions <math>A</math> et <math>B</math> suivantes sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?</p> <p><b>a.</b> <math>A : f</math> est injective et <math>B : \text{card}(f(E)) = \text{card}(E)</math>.</p> <p><b>b.</b> <math>A : f</math> est surjective et <math>B : \text{card}(f^{-1}(F)) = \text{card}(F)</math>.</p> <p><b>c.</b> <math>A : f</math> est surjective et <math>B : \text{card}(f(E)) = \text{card}(F)</math>.</p>
<p><b>2</b> 1. Soit <math>f</math> une application surjective d'un ensemble <math>E</math> dans lui-même, alors <math>f</math> est bijective.</p> <p><input type="checkbox"/> a. Vrai. <input type="checkbox"/> b. Faux.</p> <p>2. Soit <math>f</math> une application injective d'un ensemble fini <math>E</math> dans lui-même, alors <math>f</math> est bijective.</p> <p><input type="checkbox"/> a. Vrai. <input type="checkbox"/> b. Faux.</p>	<p><b>4</b> Soient <math>E</math> et <math>F</math> deux ensembles finis de cardinaux <math>n</math> et <math>p</math>, avec <math>n &lt; p</math>.</p> <p><b>a.</b> Combien y a-t-il de bijections de <math>E</math> dans <math>F</math> ?</p> <p><b>b.</b> Combien y a-t-il d'injections de <math>E</math> dans <math>F</math> ?</p> <p><b>c.</b> Combien y a-t-il de surjections de <math>E</math> dans <math>F</math> ?</p> <p><b>5</b> Développer <math>\forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^n</math> et <math>(1-x)^n</math>.</p> <p><b>6</b> Combien y a-t-il de possibilités de remplir une grille de loto ? (On rappelle qu'il faut cocher 6 cases de la grille qui comporte 49 cases numérotées de 1 à 49.)</p>

© Nathan, classe prépa

### Savoir appliquer le cours

<p><b>1</b> Démontrer par récurrence les propositions 1 et 2 .</p> <p><b>2</b> Soient deux entiers <math>n</math> et <math>p</math>, avec <math>n \geq p &gt; 0</math>. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de <math>\{1, \dots, p\}</math> dans <math>\{1, \dots, n\}</math>.</p> <p><b>3</b> Démontrer la proposition 11.</p> <p><b>4</b> 1. Démontrer la proposition 16, par récurrence sur <math>n</math>.</p>	<p><b>2.</b> Démontrer la proposition 16, en utilisant la formule du binôme.</p> <p><b>5</b> Soit <math>E</math> un ensemble fini non vide. Montrer qu'il y a autant de parties de <math>E</math> de cardinal pair que de parties de <math>E</math> de cardinal impair.</p> <p><b>6</b> Montrer que la partie de <math>\mathbb{Q}</math> définie par <math>A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0 \text{ et } q^2 \geq 2\}</math> est minorée mais n'admet pas de plus petit élément.</p>
--	---

# 6 – Structures algébriques

## Avant la colle

### Tester ses connaissances

► Corrigés p 177

- |   |  |
|---|--|
| <p>● <b>1</b> 1. Un groupe peut être vide.<br/><input type="checkbox"/> a. Vrai                      <input type="checkbox"/> b. Faux</p> <p>2. Un groupe peut être réduit à son élément neutre.<br/><input type="checkbox"/> a. Vrai                      <input type="checkbox"/> b. Faux</p> <p>● <b>2</b> Soit <math>(G, \cdot)</math> un groupe de neutre <math>e</math>.<br/>Montrer que <math>\forall x \in G, \forall y \in G,</math><br/><math>x \cdot y = e \iff y = x^{-1}</math>.</p> <p>● <b>3</b> + et <math>\times</math> sont l'addition et la multiplication usuelles.<br/><b>a.</b> <math>(\mathbb{N}, +)</math> est-il un groupe ?<br/><b>b.</b> <math>(\mathbb{Z}, +)</math> est-il un groupe ?<br/><b>c.</b> <math>(\mathbb{Z}, \times)</math> est-il un groupe ?<br/><b>d.</b> <math>(\mathbb{Q}, +)</math> est-il un groupe ?<br/><b>e.</b> <math>(\mathbb{Q}, \times)</math> est-il un groupe ?<br/><b>f.</b> <math>(\mathbb{Q}^*, \times)</math> est-il un groupe ?</p> <p>● <b>4</b> 1. Vérifier à nouveau que l'ensemble <math>U</math> des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication, est un groupe abélien.</p> | <p>2. Soit <math>n \in \mathbb{N}^*</math> on note <math>U_n</math> l'ensemble des racines <math>n</math>-ièmes de 1. Montrer que <math>U_n</math> est un sous-groupe de <math>U</math>.</p> <p>● <b>5</b> + et <math>\times</math> sont l'addition et la multiplication usuelles.<br/><b>a.</b> <math>(\mathbb{N}, +, \times)</math> est-il un anneau ?<br/>Est-il un corps ?<br/><b>b.</b> <math>(\mathbb{Z}, +, \times)</math> est-il un anneau ?<br/>Est-il un corps ?<br/><b>c.</b> <math>(\mathbb{Q}, +, \times)</math> est-il un anneau ?<br/>Est-il un corps ?<br/><b>d.</b> <math>(\mathbb{R}, +, \times)</math> est-il un anneau ?<br/>Est-il un corps ?<br/><b>e.</b> <math>(\mathbb{C}, +, \times)</math> est-il un anneau ?<br/>Est-il un corps ?</p> <p>● <b>6</b> Soit un anneau <math>(A, +, \times)</math>.<br/>Montrer que <math>(1 = 0)</math> si et seulement si <math>(A = \{0\})</math>.</p> |
|---|--|