

4 – Généralités sur la logique, les ensembles et les applications



Tester ses connaissances

1 Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou non (en le démontrant bien entendu).

- a. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$.
- b. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$.
- c. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$.
- d. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$.
- e. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$.
- f. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$.
- g. $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$.

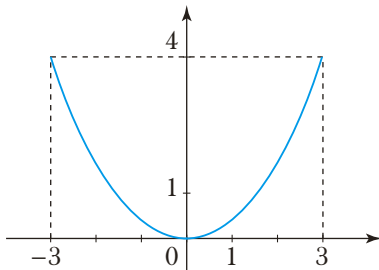
2 P et Q sont deux prédicats définis sur l'ensemble E . Développer la négation dans chaque cas suivant :

- a. $\text{Non}(\forall x \in E, (P(x) \Rightarrow Q(x)))$
- b. $\text{Non}(\exists x \in E, (P(x) \text{ et } Q(x)))$.
- c. $\text{Non}(\forall x \in E, (P(x) \text{ ou } Q(x)))$.

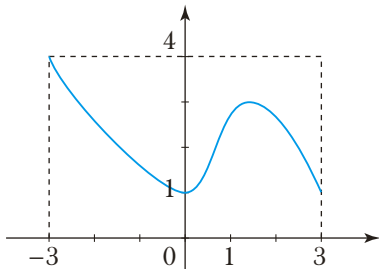
3 Soit $E = \{a, b, c\}$. Déterminer l'ensemble des parties de E .

4 Dans chaque cas, l'application f de $[-3 ; 3]$ dans $[0 ; 4]$, dont on fournit le graphe, est-elle injective ? surjective ? bijective ?

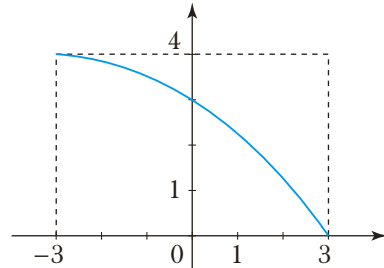
a.



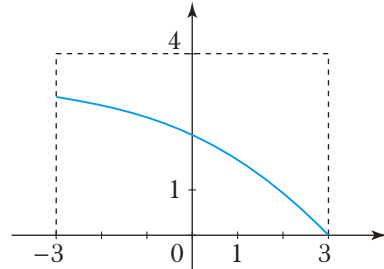
b.



c.



d.



5 Dans chaque cas, l'application définie est-elle injective ? surjective ? bijective ?

- a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$
- b. $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$
- c. $h : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$
- d. $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$

6 Soit f une application de E dans F . Les propositions A et B sont-elles équivalentes, l'une implique-t-elle l'autre ?

- a. $A : f$ est injective et $B :$ tout élément de F admet au plus un antécédent par f .
- b. $A : f$ est surjective et $B :$ tout élément de F admet au moins un antécédent par f .
- c. $A : f$ est bijective et $B :$ tout élément de F admet exactement un antécédent par f .
- d. $A : f$ est surjective et $B : f(E) = F$.
- e. $A : f$ est injective et $B : f^{-1}(F) = E$.

7 Soit f une application de E dans F et soit g une application de F dans E .

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a.** Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
- b.** Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- c.** Si $g \circ f$ est bijective alors f et g sont bijectives.
- d.** Si $g \circ f = \text{Id}_E$ alors g et f sont bijectives et $g = f^{-1}$.

- 8**
- 1.** Montrer que sur \mathbb{Z} , la relation « inférieur ou égal » (notée \leq) est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
 - 2.** La relation « inférieur strictement » (notée $<$) est-elle une relation d'ordre sur \mathbb{Z} ?

9 Soit E un ensemble ordonné et soit A une partie de E . Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a.** S'il existe, le plus petit élément de A est l'unique minorant de A qui soit dans A .
- b.** S'il existe, le plus grand élément de A est l'unique majorant de A qui soit dans A .
- c.** Si A est majorée, elle admet un plus grand élément.
- d.** Si A admet un plus grand élément, celui-ci est le plus petit des majorants de A .
- e.** Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est également le plus grand élément de A .

Savoir appliquer le cours

1 Pour chacune des assertions suivantes, déterminer la négation. Préciser laquelle, de l'assertion initiale ou de sa négation, est vraie.

- a.** $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n$.
- b.** $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \geq n$.
- c.** $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x) \Rightarrow (x \geq 0)$.
- d.** $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, -x < y < x$.

2 Soit un ensemble E , et soient A, B et C trois parties de E .
Montrer que :

$$((A \cup C) \subset (A \cup B) \text{ et } (A \cap C) \subset (A \cap B)) \Rightarrow C \subset B$$

3 Démontrer la proposition 7.

4 **1.** Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E et soit B une partie de E .

a. Montrer que :

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

b. Montrer que :

$$B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i).$$

2. Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ deux familles de parties d'un ensemble E .

a. Montrer que :

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j).$$

b. Montrer que :

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j).$$

5 Montrer que l'inclusion définit une relation d'ordre sur l'ensemble des parties de \mathbb{N} . Cet ordre est-il total ?

6 On définit la loi $*$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+, x * y = x^2 + y^2$.

1. Vérifier que $*$ est une loi de composition interne sur \mathbb{R}_+ .

2. La loi $*$ est-elle associative ? commutative ? Admet-elle un élément neutre ?