2 – Géométrie élémentaire du plan

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Toute droite du plan admet-elle une équation de la forme :

a. $y = ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$?

b. $x = ay + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$?

c. $ax + by + c = 0,\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$?

d. $\cos\alpha x + \sin\alpha y = \beta,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$?

2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient deux points M et M', distincts de O, de coordonnées polaires (r, θ) et (r', θ').
Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'elle implique-t-elle l'autre ?

a. A : (O, M et M' sont alignés)
et B : $(\theta \equiv \theta'\ [2\pi])$.

b. A : (O, M et M' sont alignés)
et B : $(\theta \equiv \theta'\ [\pi])$.

c. A : (M et M' sont confondus)
et B : $(\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$ et $r = r')$.

d. A : $(OM = OM')$ et B : $(r^2 = (r')^2)$.

3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(-4, 3)$ et $(2, 1)$.
Déterminer les cosinus et sinus de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires du plan.

1. Peut-on avoir simultanément
$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$?

2. Peut-on avoir simultanément
$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$?

3. Les équivalences suivantes sont-elles vraies ?

a. ($(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe) $\Leftrightarrow$ $(\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$.

b. ($(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe) $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 1)$.

5 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit la droite D d'équation : $5x - 7y + 3 = 0$.

a. Déterminer un vecteur directeur de D.

b. Déterminer un vecteur normal à D.

c. Déterminer un paramétrage de D.

6 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit la droite D d'équation $x - 2y + 2 = 0$ et soient les cercles Γ et Γ' d'équations respectives :
$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$ et $x^2 + y^2 + 4y = \frac{9}{4}$.
Déterminer le nombre de points d'intersection de :

a. D et Γ ; **b.** D et Γ' ; **c.** Γ et Γ'.

Savoir appliquer le cours

1 **1.** Démontrer la proposition 7 (théorème de Pythagore).
On pourra pour cela utiliser la bilinéarité du produit scalaire.

2. Démontrer la proposition 8 (expression du produit scalaire dans le plan complexe).

2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit le repère $\mathcal{R}' = (A, \vec{u}, \vec{v})$ obtenu depuis $\mathcal{R}$ par rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par translation de vecteur $\vec{w}(3, -2)$.

1. Soit le point B de coordonnées $(-1, 2)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$.

2. Soit la droite D d'équation : $\sqrt{3}x - y = 1$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer une équation de D dans $\mathcal{R}'$.

3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient les points $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ et $C(4, 5)$.

1. Montrer que ABC est un triangle rectangle.

2. Déterminer une équation du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

3. Soit le point $D(1, 5)$. Montrer que D est sur Γ puis déterminer une équation de la tangente à Γ en D.

4 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient les points $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$ et $C(1, 0)$.

1. Déterminer la distance de C à la droite (AB).

2. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que les distances de M à C et de M à la droite (AB) soient égales.

5 Démontrer la proposition 11.

6 Démontrer la proposition 24.