9 – Séries entières

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Les polynômes peuvent-ils toujours être vus comme des séries entières de rayon de convergence $+\infty$?
Une série entière de rayon de convergence $+\infty$ est-elle toujours une fonction polynôme ?

2 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes de limite nulle.
Que peut-on dire du rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$?

3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et un complexe z_0 tel que la série $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente.
Que dire du rayon de convergence ?

4 PT/PC Pour quelles valeurs du réel t a-t-on l'égalité (*) : $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$?

5 **a.** Montrer que le rayon de convergence de la somme de deux séries entières peut être différent du minimum des deux rayons.
b. Même question avec le produit de Cauchy.

6 PC/PSI Sans refaire les démonstrations, rappeler les étapes nécessaires pour prouver qu'une série entière de rayon de convergence R a une fonction somme de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,\ R[$.

7 Montrer que la fonction « sinus cardinal » $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

8 La fonction arctangente est-elle développable en série entière ? Si oui, donner ce développement et son rayon de convergence.

9 Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et développable en série entière au voisinage de 0. Le rayon de cette série entière est-il nécessairement $+\infty$?

10 Si une suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall t \in\ ]-1,\ 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 1 - t$, que peut-on dire des complexes a_n ?

11 PC/PSI Soit R un réel strictement positif.
On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et que la série $\sum |a_n| R^n$ converge.
Quel est le domaine de continuité de la fonction somme ?

Savoir appliquer le cours

1 Calculer le rayon de convergence de $\sum \frac{2^{k^2}}{(2k)!} x^{2k}$.

2 Pour toutes les valeurs de R possibles, donner un exemple de série entière de rayon de convergence R.

3 Soit la fonction f définie par $f(0) = 0$ et pour x non nul, $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}$.

a. Montrer que la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec pour tout entier n positif, $f^{(n)}(0) = 0$.

b. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

4 Montrer que l'on peut développer $\frac{1}{(1-z)^2}$ en série entière pour $|z| < 1$.

5 Développer en série entière la fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ au voisinage de 0.

6 Calculer le rayon de convergence de $\sum (-1)^n \ln n \cdot \pi^n \cdot \frac{n+2}{\sqrt{2n+3}} z^n$.

7 PSI Sur quels intervalles de $\mathbb{R}_+$ la série de fonctions $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge-t-elle uniformément ?

8 Soit α un réel strictement positif.
Comparer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n n^\alpha z^n$.

9 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls.
Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. Les propriétés suivantes sont-elles équivalentes ?

(i) R est la limite de la suite $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

(ii) La série $\sum a_n x^n$ a R pour rayon de convergence.

10 Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

On pose $c_n = \max(|a_n|, |b_n|)$.
Quel est le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$?

11 Soient un réel $a > 0$ et une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I =]-a, a[$.
On suppose qu'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout entier n,

$$\sup_{x \in I} |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M \cdot n!}{\rho^n}$$

Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.