

# 8 – Séries de fonctions

## Avant la colle

### Tester ses connaissances

- |  |  |
|--|--|
| <p>1 <b>PSI</b> Rappeler quelles relations d'implications existent entre les différents types de convergence de séries de fonctions : simple, absolue, uniforme, normale.</p> <p>2. On suppose que les fonctions <math>f_n</math> sont continues sur <math>[0, 1]</math> et que <math>\sum f_n</math> converge normalement sur tout segment <math>[0, a]</math>, <math>0 &lt; a &lt; 1</math>.</p> <p>a. Y a-t-il convergence normale sur <math>[0, 1[</math> ?</p> <p>b. La fonction somme est-elle continue sur <math>[0, 1[</math> ?</p> <p>c. La fonction somme a-t-elle une limite en 1 ?</p> | <p>3 Citer les différents théorèmes permettant d'intégrer la fonction somme d'une série de fonctions.</p> <p>4 On considère une suite <math>(f_n)</math> de fonctions <math>\mathcal{C}^\infty</math> sur <math>\mathbb{R}_+</math>, telle que pour tout réel <math>x \geq 0</math>, <math>\sum f_n(x)</math> converge.</p> <p>Quelles hypothèses permettent de montrer que la fonction somme est <math>\mathcal{C}^\infty</math> sur <math>\mathbb{R}_+</math> ?</p> <p>5 Pour appliquer le théorème d'interversion série-intégrale sur un intervalle quelconque, il faut une hypothèse sur la fonction somme ; la rappeler.</p> <p>Vous paraît-elle superflue ? facile ou délicate à prouver ?</p> |
|--|--|

### Savoir appliquer le cours

► Corrigés p. 284

- |   |  |
|---|--|
| <p>1 On définit <math>F(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(n\theta)}{n^2}</math>.</p> <p>a. Montrer que <math>F</math> est continue et périodique sur <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p>b. Calculer sa valeur moyenne en utilisant <math>\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}</math>.</p> <p>2 Déterminer les intervalles sur lesquels <math>\sum \frac{x^n}{n^2}</math> converge simplement, et ceux sur lesquels elle converge normalement.</p> <p>3 On pose <math>f_n(x) = (-1)^n e^{-x n^2}</math> et <math>F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)</math>.</p> | <p>a. Montrer que <math>F</math> est continue sur <math>\mathbb{R}_+^*</math>.</p> <p>b. Montrer que <math>F</math> est intégrable sur <math>\mathbb{R}_+^*</math> et calculer son intégrale sous forme de série (on utilisera <math>\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}</math>).</p> <p>4 On définit la fonction <math>\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}</math>.</p> <p>a. Donner son domaine de définition.</p> <p>b. Montrer qu'elle est <math>\mathcal{C}^\infty</math> sur son domaine.</p> <p>c. Calculer sa limite en <math>+\infty</math>.</p> <p>5 On suppose que les fonctions <math>f_n</math> sont continues et que la série <math>\sum f_n</math> converge normalement sur un segment <math>[a, b]</math>.</p> |
|---|--|

Montrer que l'on peut écrire :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_1 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1$$

6 Examiner les différents types de convergence (simple, normale et pour les PSI, uniforme) pour la série  $\sum x^n$  sur les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

7 On pose  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ .

a. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment  $[-a, a]$ ,  $0 < a < 1$ .

b. Chercher l'intervalle maximal sur lequel il y a convergence simple.

c. (PSI) Prouver qu'il y a convergence uniforme sur  $[-1, 0]$ .

d. (PSI) Prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme sur  $[0, 1[$ .