

7 – Normes et continuité

Avant la colle

Tester ses connaissances

1. **a.** Quelles sont les boules de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$?
b. Décrire la boule unité fermée de \mathbb{R}^2 pour $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.
- 2 On considère $E = \mathcal{C}([-1, 1])$ et $f = |\cdot|$.
a. Quels sont les éléments de la boule fermée de centre f et de rayon $\frac{1}{2}$ pour $\|\cdot\|_\infty$?
b. Même question pour $\|\cdot\|_1$.
- 3 On considère deux normes équivalentes N et N' sur un espace vectoriel normé E . Indiquer, parmi les énoncés suivants, ceux pour lesquels on peut omettre de préciser laquelle des deux normes est concernée.
a. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge.
b. Tous les vecteurs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même norme.
c. L'application $f: E \rightarrow E$ est 1-lipschitzienne.
- 4 **a.** Soit E un espace vectoriel. La notion de « partie bornée de E » a-t-elle un sens ?
b. L'image d'une partie bornée par une fonction continue est-elle bornée ?
- 5 Y a-t-il des implications entre convergence en moyenne et convergence simple ?
- 6 Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Peut-on comparer la norme de la convergence en moyenne et la norme de la convergence en moyenne quadratique sur I ?
- 7 **(PSI)** Soient E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie.
a. Soit f une application continue de A , partie de E , dans F .
L'image réciproque d'un ouvert de F est-elle nécessairement un ouvert de E ?
b. Soit f application continue de E dans F .
L'image directe d'une partie fermée est-elle toujours fermée ?
- 8 Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Soit $a \in E$.
Montrer que l'on peut définir :
$$d(a, K) = \inf_{k \in K} \|a - k\|.$$

Que peut-on dire de plus ?
- 9 **(PSI)** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.
Peut-on définir $\sup \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, x \in E, x \neq 0 \right\}$?
Est-ce un maximum ?

Savoir appliquer le cours

1 Soient x, x' deux éléments d'un espace vectoriel normé.

a. Montrer que les boules $B_f(x, r)$ et $B_f(x', r')$ ont une intersection non vide si et seulement si $\|x - x'\| \leq r + r'$.

b. Si $\|x - x'\| = r + r'$, peut-on dire que l'intersection est un singleton ?

2 On se place dans un espace vectoriel normé E , et on considère $x \in E$.

a. Soit r_n une suite strictement décroissante de réels positifs, de limite $r > 0$.

Déterminer l'intersection des boules ouvertes de centre x et de rayon r_n .

b. Si on suppose seulement que la suite (r_n) est décroissante, le résultat précédent est-il modifié ?

3 Comparer les normes de $\mathbb{R}[X]$ définies par les expressions suivantes : pour un polynôme

$P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ (les a_i étant nuls à partir d'un certain rang) :

$$\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2},$$

$$\|P\|_\infty = \max_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$$

4 a. Montrer que si $f \in \mathcal{L}_c^2([1, +\infty[)$, alors $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

b. Est-ce vrai si on remplace $[1, +\infty[$ par $]0, 1]$?

5 (PSI) Quelle est la norme subordonnée des endomorphismes suivants de l'espace euclidien \mathbb{R}^n :

a. une homothétie ?

b. une projection orthogonale ?

c. une symétrie orthogonale ?

6 Déterminer les points intérieurs et les points adhérents des parties suivantes de \mathbb{R} :

a. \mathbb{Z} ;

b. \mathbb{Q} ;

c. $H = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

7 Soit $E = \mathbb{R}^2$.

Rappeler ce qu'est un demi-plan ouvert de E et montrer qu'une telle partie de E est ouverte.

8 a. Soient $I = [a, b]$ et J deux segments de \mathbb{R} et f une fonction continue sur $I \times J$. Montrer que la fonction F définie par $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ est continue sur J .

b. Même question si J est un intervalle quelconque.

9 (PSI) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.