

5 – Dérivées et intégrales

Avant la colle

Tester ses connaissances

- 1 a.** Rappeler ce qu'est l'égalité des accroissements finis.
b. Montrer qu'elle ne s'étend pas aux fonctions à valeurs vectorielles.
- 2** Soient deux applications M et N définies d'un intervalle I de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de classe \mathcal{C}^k . Peut-on écrire une formule pour calculer $\frac{d^k}{dt^k}(M(t)N(t))$?
- 3** Soient deux applications M et N d'un intervalle I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de classe \mathcal{C}^k , telles que pour tout $t \in I$, $M^{(k)}(t) = N^{(k)}(t)$. Que peut-on dire ?
- 4** Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Donner une « formule de dérivation pour $u \circ f$ » dans chacun des cas suivants :
a. pour f fonction \mathcal{C}^1 de I dans J , u fonction \mathcal{C}^1 de J dans E ;
b. pour u et f fonctions \mathcal{C}^1 de I dans $L(E)$;
c. pour $u \in L(E)$ et f fonction \mathcal{C}^1 de I dans E .
- 5** Les fonctions suivantes sont-elles C^1 par morceaux sur \mathbb{R} :
a. la fonction $f : x \mapsto |\sin x|$?
b. la fonction $g : x \mapsto \sqrt{|\sin(3x)|}$?
- 6 a.** Existe-t-il un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* ?
b. Même question de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$.
c. Même question de $] -1, 1[$ sur $] -1, 1[$.
- 7** Une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , strictement croissante et de classe \mathcal{C}^k est-elle un \mathcal{C}^k -difféomorphisme ?
- 8** Proposer une généralisation du théorème du prolongement dérivable pour une fonction \mathcal{C}^k sur $]0, 1]$ et continue sur $[0, 1]$, et la démontrer.
- 9** Tous les équivalents considérés sont pour t tendant vers 1.
a. La relation $f(t) \sim (t-1)^2$ entraîne-t-elle $\int_1^t f(u) du \sim \int_1^t (u-1)^2 du$?
b. La relation $f(t) \sim (t-1)^2$ entraîne-t-elle $\int_0^t f(u) du \sim \int_0^t (u-1)^2 du$?
c. La relation $f(t) \sim (t-1)^{-\frac{1}{2}}$ entraîne-t-elle $\int_1^t f(u) du \sim \int_1^t (u-1)^{-\frac{1}{2}} du$?
- 10** On suppose qu'une fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* admet pour développement limité en 0 :
$$f(h) = a_0 + ha_1 + \frac{1}{2}h^2a_2 + o(h^2).$$

a. Montrer que la fonction f peut être prolongé en 0.
b. Peut-on dire que a_1 est la dérivée de f en 0 ?
c. Peut-on dire que a_2 est sa dérivée seconde en 0 ?
- 11** On suppose que f est une fonction continue de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans \mathbb{C} , et que pour chaque réel $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Pour appliquer le théorème de continuité sous intégrale à l'expression
$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt,$$
 l'hypothèse de domination suivante suffit-elle :
« pour tous réels a, b , $0 < a < b$, il existe une fonction ϕ intégrable sur \mathbb{R}_+^* telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in [a, b]$, $|f(x, t)| \leq \phi(t)$ » ?

Savoir appliquer le cours

1 Soit E un espace euclidien.

On suppose que $u : t \mapsto u(t)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans E avec, pour tout t , $\|u(t)\| = 1$.

Quelle propriété peut-on en déduire pour le vecteur dérivé $u'(t)$?

2 Soit f une application définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 , ce dernier étant muni de sa structure euclidienne canonique. Soit P un plan de \mathbb{R}^3 .

On suppose que pour tout t , le vecteur $f(-t)$ est le symétrique orthogonal de $f(t)$ par rapport au plan P .

a. Pour deux réels a et b , comparer les vecteurs $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_{-b}^{-a} f(t) dt$.

b. Quelle propriété de $\int_{-a}^a f(u) du$ peut-on en déduire ?

3 Soient u et v des fonctions à valeurs réelles de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans E , espace vectoriel de dimension finie.

Quelle est la dérivée de la fonction ϕ définie par $\phi(x) = \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)$?

4 Soit f une fonction continue par morceaux d'un intervalle I dans un espace de dimension finie E .

On appelle primitive de f une fonction continue sur I , dérivable en tout point a où f est continue, avec $F'(a) = f(a)$.

La fonction f admet-elle des primitives ?

5 On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a. Suivant le signe du réel x , comparer les réels e^x et $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

b. Montrer que la suite S_n converge vers e^x .

6 Soit P un polynôme à valeurs réelles. On pose $S(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+1)t^2} P(t) dt$.

a. Montrer que S est une fonction définie sur \mathbb{R} .

b. Montrer que S est continue sur son domaine.

c. Quelles sont ses limites en $+\infty$ et $-\infty$?

d. Montrer que S est \mathcal{C}^1 sur tout segment de la forme $[-a, a]$, $a > 0$, puis sur \mathbb{R} .

7 Montrer que l'inégalité de Taylor-Lagrange peut être étendue au cas où f est \mathcal{C}^k sur $[a, b]$, \mathcal{C}^{k+1} sur $]a, b[$, avec $f^{(k+1)}$ bornée sur $]a, b[$.

8 Soit f de classe \mathcal{C}^1 d'un segment $[a, b]$ dans un espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que $I_n = \int_a^b \sin(nt) f(t) dt$ a une limite nulle.