4 – Suites et approximation de fonctions

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 On pose $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0, 1]$. Lorsque n tend vers l'infini, $f_n(x)$ tend soit vers 0 (si $x \in [0, 1[$), soit vers 1 (si $x = 1$). La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0, 1]$?

2 (PSI) On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Pour montrer que f est continue, suffit-il qu'il y ait convergence uniforme sur tous les segments de la forme $\left[\frac{1}{a}, a\right]$, avec $a > 1$?

On suppose en outre que les fonctions f_n ont pour limite 0 en l'infini. Pour en déduire que f a pour limite 0 en l'infini, suffit-il :

b. qu'il y ait convergence uniforme sur tous les segments de la forme $\left[\frac{1}{a}, a\right]$, avec $a > 1$?

c. qu'il y ait convergence uniforme sur les intervalles $[a, +\infty[$, $a > 1$?

3 (PSI) La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues par morceaux est-elle nécessairement continue par morceaux ?

4 (PSI) Indiquer comment utiliser le théorème d'interversion de limites pour montrer que la suite $f_n : x \mapsto x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

5 (PSI) Quelles sont toutes les fonctions que l'on peut obtenir comme limite uniforme de fonctions polynômes sur $[0, 1]$?

6 On suppose réalisées les hypothèses du théorème de convergence dominée sur $I = [0, +\infty[$ pour une suite de fonctions (f_n), mais avec la propriété de domination remplacée par l'une des hypothèses suivantes :

a. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 3,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$;

b. $\forall n > 3,\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$;

c. $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \underset{x\to+\infty}{=} 0\,\varphi(x)$.

Dire, dans chaque cas, si l'on peut trouver la limite de $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

7 Le théorème de Weierstrass polynomial peut-il être étendu aux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ au lieu d'un segment ?

Savoir appliquer le cours

1 **a.** La limite simple d'une suite de fonctions croissantes (respectivement convexes) est-elle une fonction croissante (respectivement convexe) ?

b. La limite simple d'une suite de fonctions bornées est-elle bornée ?

2 Donner la limite simple des suites de fonctions suivantes :

a. $f_n : x \mapsto e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$;

b. f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } \dfrac{1}{n} < x < n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 PSI On pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}}$ pour $n \geqslant 1$.
Montrer que ces fonctions sont dérivables, forment une suite qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et que la fonction limite n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

4 PSI Étudier les convergences simple et uniforme pour la suite $f_n(x) = \arctan(nx)$ sur les différents intervalles de $\mathbb{R}$.

5 PSI Montrer que le théorème de convergence dominée permet de redémontrer le théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment.

6 Quelle est la limite de :

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{2}(1-x)^n\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x^n\right) dx \text{ ?}$$

7 Calculer la limite de $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \arctan t \, dt$ de deux façons.

8 Calculer la limite de $I_n = \int_0^1 t^{t^n} \, dt$.

9 PC/PSI Soit une fonction f continue sur $[0, 1]$ et telle que pour tout polynôme P, on ait $\int_0^1 f(t) P(t) \, dt = 0$.

Montrer que f est la fonction nulle.