12 – Fonctions de deux variables

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$.
Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :
pour tout point a de U, U contient une boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$.

2 Soit une fonction f définie d'une partie A de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a = (a_1, a_2)$ un point de A. A-t-on équivalence entre les propositions P et Q suivantes ?

P : La fonction f est continue en a.

Q : Les applications partielles f_1 et f_2 de f en a sont continues respectivement en a_1 et en a_2.

Indication : on pourra notamment penser à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

3 Soit une fonction f définie d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et soit a un point de U.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Si f admet des dérivées partielles en a alors les applications partielles f_1 et f_2 de f en a sont continues respectivement en a_1 et en a_2.

b. Si f admet des dérivées partielles en a alors f est continue en a.

c. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f est continue en chaque point de U.

d. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et présente un extremum local en a alors le gradient de f en a est nul.

e. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et si le gradient de f est nul en a alors f admet un extremum local en a.

(On pourra penser à $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$).

4 Justifier que si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ et dérivant d'un potentiel scalaire sur un domaine A étoilé, alors la circulation de $\vec{V}$ le long de toute courbe fermée incluse dans A est nulle.

Savoir appliquer le cours

➤ *Corrigés p. 420*

1 Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto 3xy^2 - y\cos x + x$

2 Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer en tout point les dérivées (éventuellement partielles) de :

a. $g_1 : (x, y) \mapsto f(y, x)$.

b. $g_2 : x \mapsto f(x, x)$.

c. $g_3 : (x, y) \mapsto f(y, f(x, x))$.

d. $g_4 : x \mapsto f(x, f(x, x))$.

3 Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 2x^3y$.

a. Déterminer la dérivée de f en $a = (-1, 2)$ selon le vecteur $h = (-2, 3)$.

b. Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 en a.

4 Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$$

Calculer $\iint_D 3x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5 Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2 \leqslant y \\ x + y \leqslant 5 \end{cases}$$

Calculer $\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6 Calculer l'aire intérieure à la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$. (On rappelle que cette courbe a été étudiée au chapitre 3, « S'entraîner » exercice 5, et au chapitre 11, « Tester ses connaissances » exercice 4).