11 – Étude métrique des courbes planes

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Soit un arc $\Gamma = (I, f)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et régulier, et soit $t_0 \in I$.
On note pour tout $t \in I$, $M(t) = f(t)$.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. L'abscisse curviligne est définie de manière unique.

b. Il existe une unique abscisse curviligne s telle que $s(t_0) = 0$.

c. Si s est l'abscisse curviligne telle que $s(t_0) = 0$, alors pour tout $t \in I$, $s(t) - s(t_0)$ est la longueur de l'arc de courbe compris entre les points $M(t_0)$ et $M(t)$.

d. Le repère de Frenet en $M(t_0)$ est orthonormal direct.

e. On a $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right\|$.

2 Soit un arc $\Gamma = (I, f)$ de classe $\mathscr{C}^2$ et régulier et soit $t_0 \in I$.
On note pour tout $t \in I$, $M(t) = f(t)$.
En tout point, on note α le paramètre angulaire tel que $\vec{T} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Le rayon de courbure en t_0, s'il existe, est un réel strictement positif.

b. On a $\left\|\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}\right\| = 1$.

c. La courbure γ est donnée par : $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$.

d. La courbure γ est donnée par : $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.

e. La vitesse scalaire est $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

f. On a $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{N}$.

g. On a $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{T}$.

Savoir appliquer le cours

1 Soient deux réels a et b tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

a. On considère l'arc paramétré sur $\mathbb{R}$ par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = bt \end{cases}$$

Déterminer le repère de Frenet et la courbure en un point $M(t)$.

Préciser la vitesse et l'accélération en ce point.

b. Mêmes questions avec $f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = at^2 \\ y(t) = bt^2 \end{cases}$

2 Soit $R > 0$.

a. On considère l'arc paramétré sur $\mathbb{R}$ par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$$

Déterminer le repère de Frenet et la courbure en un point $M(t)$.

Préciser la vitesse et l'accélération en ce point.

b. On considère l'arc d'équation polaire :

$$\rho = R.$$

c. Déterminer le repère de Frenet et la courbure en un point $M(\theta)$.
Préciser la vitesse et l'accélération en ce point.

3 On considère la cycloïde de paramétrage

$$t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{pmatrix}$$

(voir chapitre 3, « S'entraîner », exercice 5).

a. Calculer la longueur d'une arche de cette cycloïde.
b. Déterminer la courbure en tout point régulier de la cycloïde.

4 On considère la cardioïde d'équation polaire : $\rho = 1 + \cos\theta$ (voir chapitre 3, « S'entraîner », exercice 4).

a. Calculer la longueur de cette courbe.
b. Déterminer la courbure en tout point régulier de cette courbe.