10 – Formules de Taylor et développements limités

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Si une fonction réelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle, elle admet un développement limité à tout ordre au voisinage de tout point de cet intervalle.

b. Si deux fonctions réelles f et g admettent des développements limités à l'ordre n au voisinage de 0, alors la fonction $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

c. Si deux fonctions réelles f et g admettent des développements limités à l'ordre n au voisinage de 0, alors la fonction $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre $2n$ au voisinage de 0.

d. Si une fonction réelle continue f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors une primitive F de f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0.

e. Si une fonction réelle dérivable f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors sa dérivée f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0.

f. Si une fonction réelle f de classe $\mathscr{C}^n$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière P, alors sa dérivée f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0 de partie régulière P'.

2 Soit $P : x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynomiale réelle de degré $n \geqslant 1$.

a. Soit $q \in [\![0, n-1]\!]$. P admet-elle un développement limité à l'ordre q au voisinage de 0 ? Si oui, donner ce développement.

b. P admet-elle un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 ? Si oui, donner ce développement.

c. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > n$. P admet-elle un développement limité à l'ordre q au voisinage de 0 ? Si oui, donner ce développement.

3 Déterminer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f : x \mapsto \sqrt{1+x} \quad \text{et de} \quad g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

4 Déterminer le développement limité de la fonction arctan à tout ordre au voisinage de 0 (on pourra dériver cette fonction).

Savoir appliquer le cours

1 Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I contenant 0.

1. Montrer que f est continue en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de 0.

2. Montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.
b. Montrer que f est dérivable en 0.
c. La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?
d. La fonction f' admet-elle un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 ?

2 Démontrer les développements limités de référence vus au **2.3.** (proposition 7).

3 Déterminer les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 de :
a. $f : x \mapsto \sin(3x) + \exp(-x)$
b. $f : x \mapsto \cos(2x)\ln(1+x)$
c. $f : x \mapsto \tan x$
d. $f : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$

4 Démontrer le corollaire 1.

5 **a.** Soit x un réel strictement positif, montrer que $\left|\ln(1+x) - x + \dfrac{1}{2}x^2\right| \leqslant \dfrac{x^3}{3}$.
b. Déterminer une valeur approchée de $\ln(1{,}003)$ à 10^{-8} près.