

# 9 – Intégration des fonctions de la variable réelle

## Avant la colle

### Tester ses connaissances

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Toute fonction réelle continue est continue par morceaux.

b. La fonction  $f$  définie par :

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f(x) = \tan x$$

est continue par morceaux sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

c. La fonction partie entière est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

d. Si une fonction réelle  $f$  est continue par morceaux et positive sur  $[a, b]$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

e. Si une fonction réelle  $f$  est continue par morceaux, positive et non nulle sur  $[a, b]$ ,

$$\text{alors } \int_a^b f(t) dt > 0.$$

f. Si une fonction réelle  $f$  est continue, positive et non nulle sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt > 0$ .

g. Toute fonction réelle continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

2 Soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a, b]$  (où  $a < b$ ). Justifier qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c)$  soit égal à la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$ .

3 Soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a, b]$ . Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? l'une d'elles implique-t-elle l'autre ?

a. A :  $f = 0$  et B :  $\int_a^b f(t) dt = 0$ .

b. A :  $f \geq 0$  et B :  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ .

c. A :  $f = 0$  et B :  $f \geq 0$  et  $\int_a^b f(t) dt = 0$ .

4 À l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

5 a. Justifier que l'on peut définir sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $F : x \mapsto \int_0^x E(t) dt$ .

b. Calculer  $F(x)$  pour  $x \in [0, 1[$ , pour  $x = 1$  puis pour  $x \in ]1, 2[$ . La fonction  $F$  est-elle dérivable en 1 ?

6 Déterminer la primitive sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0 de  $t \mapsto e^t \sin 2t$ , en utilisant le fait que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \sin 2t = \text{Im}(e^{i2t})$ .

## Savoir appliquer le cours

- 1 Démontrer la proposition 6 et le corollaire 1.
- 2 Démontrer que l'application  $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_{[a,b]} fg$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .
- 3 À l'aide du changement de variable  $u = \sin t$ , calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{3 + \sin^2 t} dt$ .
- 4 Soit  $f$  une fonction réelle continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $T$ -périodique (où  $T \in \mathbb{R}_+^*$ ).
- a.** Montrer que :
- $$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$
- b.** Montrer que l'intégrale de  $f$  sur tout segment de longueur  $T$  est égale à  $\int_0^T f(t) dt$ .
- 5 Soit  $a > 0$ , et soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $[-a, a]$ .
- a.** Montrer que si  $f$  est paire alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ .
- b.** Montrer que si  $f$  est impaire alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ .
- 6 Soit  $f$  une fonction réelle continue sur un segment  $[a, b]$ . Déterminer une fonction  $g$  continue sur  $[0, 1]$  telle que  $\int_0^1 g(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ .