8 – Dérivation des fonctions réelles

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Montrer, à l'aide de la définition du nombre dérivé, que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x$.

2 Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I, et soit a un point intérieur à I.
Les propositions A et B suivantes sont-elles équivalentes ? L'une d'elles implique-t-elle l'autre ?
A : f est dérivable en a.
B : f est dérivable à droite et à gauche en a.

3 Soit f une fonction réelle définie sur un segment $[a, b]$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Si f est dérivable sur $[a, b]$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.

b. Si f est dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

c. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

d. Si f admet un extremum en $c \in [a, b]$ et si f est dérivable en c alors $f'(c) = 0$.

e. Si f admet un extremum en $c \in]a, b[$ et si f est dérivable en c alors $f'(c) = 0$.

4 Soit f une fonction réelle, définie et dérivable sur un intervalle I, et soit a un point intérieur à I.
Les propositions A et B suivantes sont-elles équivalentes ? L'une d'elles implique-t-elle l'autre ?

a. A : f est strictement croissante sur I.
B : $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$.

b. A : f admet un extremum local en a.
B : $f'(a) = 0$.

5 Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Si f est dérivable sur I alors elle est continue sur I.

b. Si f est deux fois dérivable sur I alors elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

c. Si f est deux fois dérivable sur I alors elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

d. $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$.

e. Si f est convexe sur I alors elle est dérivable sur I et sa dérivée est croissante.

f. Si, pour $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I et si f s'annule $n + 1$ fois sur I alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

g. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et si $f'' \geqslant 0$ alors f est convexe sur I.

6 Soit f une fonction réelle continue sur $[0, 1]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1[$ telle que la fonction f' admette une limite finie en 1. Peut-on affirmer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$?

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

1 Démontrer le corollaire 1.

2 Démontrer le corollaire 3.

3 Étudier la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

4 Démontrer par récurrence le *iv*) de la proposition 15.

5 Soit f une fonction définie d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe si et seulement si : $\forall (x, y) \in I^2$ tel que $x < y$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

6 Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

7 **a.** Calculer la dérivée d'ordre n de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

b. Calculer la dérivée d'ordre n de $x \mapsto \sin x$, puis de $f : x \mapsto x^2 \sin x$.

© Nathan, *classe prépa*