

7 – Continuité sur un intervalle des fonctions réelles

Avant la colle

Tester ses connaissances

- 1** Soit une fonction réelle f définie sur \mathbb{R} . Y a-t-il équivalence entre les propositions suivantes ? L'une implique-t-elle l'autre ?
 A : la restriction de f à $[0, 1]$ est continue.
 B : f est continue en tout point de $[0, 1]$.
- 2** L'image d'un intervalle ouvert par une fonction réelle continue est-elle nécessairement un intervalle ouvert ?
- 3** **a.** Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $[0, 1]$ et non bornées ? Si oui, en donner un exemple.
b. Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $]0, 1]$ et non bornées ? Si oui, en donner un exemple.
c. Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $]0, 1]$, bornées mais n'atteignant pas leurs bornes ? Si oui, en donner un exemple.
d. Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $[0, 1]$, bornées mais n'atteignant pas leurs bornes ? Si oui, en donner un exemple.
- 4** Cocher la bonne réponse.
1. Soit une fonction réelle f définie sur $[a, b]$ et croissante, alors $f([a, b])$ est :
 a. $[f(a), f(b)]$
 b. $[f(b), f(a)]$
 c. On ne peut pas savoir.
- 2.** Soit une fonction réelle f définie et continue sur $[a, b]$ et décroissante. Alors $f([a, b])$ est :
 a. $[f(a), f(b)]$
 b. $[f(b), f(a)]$
 c. On ne peut pas savoir.
- 5** **a.** Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I . Y a-t-il équivalence entre les propositions suivantes ? L'une d'elles implique-t-elle l'autre ?
 A : $f > 0$.
 B : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, f(x) \geq \alpha$.
b. Même question lorsque I est un segment $[a, b]$.
- 6** **a.** Soit f une fonction réelle définie sur $[0, 2]$. On sait que les restrictions de f à $[0, 1]$ et à $[1, 2]$ sont continues. Peut-on affirmer que f est continue ?
b. Même question si les restrictions de f à $[0, 1]$ et à $]1, 2]$ sont supposées continues.
- 7** Une application contractante est-elle nécessairement continue ?

Savoir appliquer le cours

1 a. Démontrer les propositions 4 et 5.

b. Démontrer la proposition 9.

2 a. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}.$$

b. Montrer que la fonction cosinus est lipschitzienne sur \mathbb{R} .

c. La fonction cosinus est-elle uniformément continue sur \mathbb{R} ?

3 Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sqrt{x}.$$

a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n f\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$.

b. Montrer que f n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.

c. Montrer que f est uniformément continue.

4 Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Montrer que f admet un point fixe (c'est-à-dire que : $\exists x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$).

5 Soit f une application définie et continue de $[1, 2]$ dans \mathbb{R} .

Montrer que : $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in [1, 2]$, $|f(x)| \leq Mx$.