5 – Corps des nombres réels et suites réelles

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Toute partie non vide A de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

b. Si a est le plus grand élément d'une partie A de $\mathbb{R}$, a est la borne supérieure de A.

c. Si une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée, elle admet un plus grand élément.

d. Toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément et un plus petit élément.

e. Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L\in\mathbb{R}$, alors $u_n \geqslant L$ à partir d'un certain rang.

f. Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L<0$, alors $u_n<0$ partir d'un certain rang.

g. Si une suite réelle $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L\in\mathbb{R}$ et si $u\geqslant 0$, alors $L\geqslant 0$.

h. Si une suite réelle $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L\in\mathbb{R}$ et si $u<0$, alors $L<0$.

i. Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L\in\mathbb{R}$ et si $k>L$, alors $u_n<k$ à partir d'un certain rang.

j. Toute suite monotone converge.

2 Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?

a. A : u est bornée $\quad B$: u est convergente.

b. A : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=-\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$

B : u diverge.

c. A : u converge. $\quad B$: u est stationnaire.

3 Soient deux suites réelles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?

a. A : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

B : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$.

b. A : $u_n<v_n$ à partir d'un certain rang.

B : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)<\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$.

4 Soient deux suites réelles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?

a. A : $u_n=\mathrm{o}(v_n)$. $\quad B$: $u_n=\mathrm{O}(v_n)$.

b. A : $u_n\sim v_n$. $\quad B$: $u_n=\mathrm{O}(v_n)$.

c. A : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n+w_n$, où $w_n=\mathrm{o}(v_n)$.

B : $u_n\sim v_n$.

5 Soient deux réels α et β tels que $\alpha<\beta$. Montrer que $n^\alpha=\mathrm{o}(n^\beta)$.
Donner un équivalent simple de $n^\alpha+n^\beta$.

6 Soient deux suites réelles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On suppose que $u_n\sim v_n$, peut-on dire que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda u_n\sim v_n$?

7 **a.** Déterminer des équivalents simples de

$$u_n=\frac{n-1}{n^2} \quad\text{et}\quad v_n=\frac{2-n^2}{n^3}.$$

b. Déterminer des équivalents de u_nv_n, $\dfrac{u_n}{v_n}$, u_n+v_n et u_n-v_n.

Savoir appliquer le cours

1 Démontrer la proposition 11.

2 Montrer que tout irrationnel est limite d'une suite de rationnels.

3 Démontrer la proposition 16.

4 Démontrer le théorème 3.

5 Soit une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $L \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = L \iff u_n \sim L$.
Ce résultat est-il vrai pour $L = 0$?

6 Démontrer les propositions 26 et 28 (on se limitera au cas où les suites u et v ne s'annulent pas à partir d'un certain rang).

7 **a.** Soient trois suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$.
Montrer que $u_n = o(w_n)$.

b. Démontrer la transitivité de la relation « $\sim$ ».

8 Justifier les équivalents de référence vus au paragraphe **2.6.3.**
En utilisant ces équivalents de référence, déterminer un équivalent simple de

$$u_n = \frac{\sin\left(\dfrac{n+3}{n^3}\right)}{\ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)}.$$