3 – Courbes planes paramétrées

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Soit un arc paramétré $(I, f = (x, y))$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $t_0 \in I$.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Si $x'(t_0) = 0$, alors le point $f(t_0)$ est un point singulier de l'arc.

b. Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$, alors le point $f(t_0)$ est un point singulier de l'arc.

c. Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, alors l'arc admet une tangente « verticale » en $f(t_0)$.

d. Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, alors l'arc admet une tangente « horizontale » en $f(t_0)$.

2 Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$f : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ et
$g : t \mapsto (\cos 3t, \sin 3t)$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Le support de l'arc paramétré $([0, 2\pi[, f)$ est $\mathcal{C}$.

b. Le support de l'arc paramétré $\left(\left[0, \frac{2\pi}{3}\right[, g\right)$ est $\mathcal{C}$.

c. Le support de l'arc paramétré $([0, \pi[, f)$ est $\mathcal{C}$.

d. Le support de l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$ est $\mathcal{C}$.

e. L'arc paramétré $(\mathbb{R}, g)$ est régulier.

3 Soit un arc paramétré $(\mathbb{R}, f = (x, y))$.

a. On suppose que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$$

À quel intervalle peut-on réduire l'étude de f ? Comment obtient-on alors tout le support ?

b. On suppose que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$$

À quel intervalle peut-on réduire l'étude de f ? Comment obtient-on alors tout le support ?

c. On suppose que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x(\pi - t) = y(t) \\ y(\pi - t) = x(t) \end{cases}$$

À quel intervalle peut-on réduire l'étude de f ? Comment obtient-on alors tout le support ?

4 Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soit $\mathcal{C} = (]a, b], f = (x, y))$ un arc paramétré.
Les propriétés A et B suivantes sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?

a. A : $\lim\limits_{t \to a} (x(t)) = +\infty$ et B : $\mathcal{C}$ admet une branche infinie en a.

b. A : $\lim\limits_{t \to a} (\|f(t)\|) = +\infty$ et B : $\mathcal{C}$ admet une branche infinie en a.

c. A : $\lim\limits_{t \to a} (x(t)) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to a} (y(t)) = \alpha \in \mathbb{R}$ et B : $\mathcal{C}$ admet pour asymptote en a la droite d'équation : $y = \alpha$.

d. A : $\lim\limits_{t \to a} (|x(t)|) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to a} (y(t)) = \alpha \in \mathbb{R}$ et B : $\mathcal{C}$ admet pour asymptote en a la droite d'équation : $y = \alpha$.

e. A : $\lim\limits_{t \to a} (x(t)) = \alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \to a} (|y(t)|) = +\infty$ et B : $\mathcal{C}$ admet pour asymptote en a la droite d'équation : $x = \alpha$.

5 Soit un arc $(\mathbb{R}, f)$ paramétré en polaire par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$\theta \mapsto \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$$

On note pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$.

a. On suppose que : $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \rho(-\theta) = \rho(\theta)$. Que peut-on dire des points $M(-\theta)$ et $M(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$? Comment peut-on restreindre l'intervalle d'étude de l'arc ?

b. On suppose que : $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \rho(-\theta) = -\rho(\theta)$. Que peut-on dire des points $M(-\theta)$ et $M(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$? Comment peut-on restreindre l'intervalle d'étude de l'arc ?

c. On suppose que : $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta)$. Que peut-on dire des points $M(\theta+2\pi)$ et $M(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$? Comment peut-on restreindre l'intervalle d'étude de l'arc ?

d. On suppose que : $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \rho(\theta+\pi) = \rho(\theta)$. Que peut-on dire des points $M(\theta+\pi)$ et $M(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$? Comment peut-on restreindre l'intervalle d'étude de l'arc ?

e. On suppose que :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \rho(-\theta) = \rho(\theta) \\ \rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta) \end{cases}$$

Comment peut-on restreindre l'intervalle d'étude de l'arc ?

Savoir appliquer le cours

1 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \left(\frac{t\ln t}{1+t^2}, \frac{\sin t}{t}\right)$$

f admet-elle des limites en 0 et en $+\infty$?

2 Soit f une fonction vectorielle définie et dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que si f ne s'annule pas sur I alors la fonction $\varphi : t \mapsto \|f(t)\|$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

3 Démontrer la proposition 4.

4 Soit l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$ où

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^2}, t^2-2t\right)$$

a. Cet arc admet-il des points stationnaires ?

b. Former une équation de la tangente à l'arc en tout point régulier.

c. Cet arc admet-il une tangente en son point stationnaire ?

5 Soit l'arc paramétré en polaire par

$$\theta \mapsto \rho(\theta) = \cos^2\theta$$

a. Cet arc admet-il des points stationnaires ?

b. Donner en tout point un vecteur directeur de la tangente à l'arc.