2 – Équations différentielles linéaires

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. L'équation différentielle :
$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$, où a, b et c sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, admet nécessairement au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

b. L'équation différentielle :
$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$, où a, b et c sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ telles que a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, admet nécessairement au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

c. L'équation différentielle :
$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$, où a, b et c sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ telles que a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$.

d. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}$. Le système

$$\begin{cases} a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où a, b et c sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ telles que a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2 Résoudre les équations différentielles suivantes.

a. $y' = 5y$ (on cherche les solutions réelles).

b. $iy' + jy = 0$.

3 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. L'équation différentielle :
$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$, où a, b et c sont des éléments de $\mathbb{K}$, est une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

b. L'équation différentielle :
$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$, où a, b et c sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$, est une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

c. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}$. Le système

$$\begin{cases} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où a, b et c sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

d. Soit $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^2$. Le système

$$\begin{cases} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

où a, b et c sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

4 Pour chacune des équations suivantes, préciser l'ensemble des fonctions solutions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, puis l'ensemble des fonctions solutions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. $2y'' - 3y' - 2y = 0$.

b. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

c. $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

Savoir appliquer le cours

➤ *Corrigés p. 73*

1 Soit l'équation linéaire homogène du premier ordre (E_0) : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ (où a et b sont des fonctions continues définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$).
Montrer, sans utiliser la résolution de cette équation, que si y_1 et y_2 sont des solutions de (E_0) sur I alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est aussi solution de (E_0) sur I.

2 Résoudre les équations différentielles suivantes (on cherchera les solutions à valeurs réelles).

a. (E) : $2y'(x) + 3y(x) = 6$.

b. (E) : $\sqrt{1-x^2}\,y' + y = 0$ sur $]-1, 1[$.

c. (E) : $x^2 y'(x) + y(x) = x^2 + x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Démontrer la proposition 7, en utilisant bien entendu la proposition 6.

4 On va étudier ce qu'on appelle le principe de superposition des solutions.
a. On considère l'équation différentielle (E) : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_1(x) + c_2(x)$, où a, b, c_1 et c_2 sont des fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que si :
i) y_1 est une solution sur I de (E_1) : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_1(x)$;
ii) y_2 est une solution sur I de (E_2) : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_2(x)$
alors $y = y_1 + y_2$ est une solution sur I de (E).
b. On considère l'équation différentielle (E) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) + d_2(x)$, où a, b et c sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et où d_1 et d_2 sont des fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que si :
i) y_1 est une solution sur I de (E_1) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x)$,
ii) y_2 est une solution sur I de (E_2) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_2(x)$
alors $y = y_1 + y_2$ est une solution sur I de (E).

5 Démontrer la proposition 9.

6 Déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que :
$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+x) = f(t)f(x)$.