1 – Fonctions usuelles

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Calculer les valeurs suivantes :

a. $\operatorname{asin}(0)$. **b.** $\operatorname{acos}(1)$.

c. $\operatorname{acos}\left(\frac{1}{2}\right)$. **d.** $\operatorname{asin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

e. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **f.** $\operatorname{atan}(1)$.

g. $\operatorname{atan}(\sqrt{3})$.

2 Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. La fonction ln est la réciproque de la fonction exp.

b. La fonction argth est la réciproque de la fonction th.

c. La fonction argch est la réciproque de la fonction ch.

d. La fonction arctan est la réciproque de la fonction tan.

e. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{asin}(\sin(x)) = x$.

f. On a : $\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\operatorname{asin}(x)) = x$.

g. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on peut définir a^b.

h. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

i. Pour tout $x > 0$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$, on a : $x^\alpha \leqslant x^\beta$.

j. arctan est l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0.

3 **a.** Soit une fonction u définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de :

$$\varphi : x \mapsto \exp(u(x)).$$

b. Soit une fonction u définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer la dérivée de :

$$\psi : x \mapsto \ln(u(x)).$$

4 **1.** Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$:

a. $\operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(x))$. **b.** $\operatorname{argch}(\operatorname{ch}(x))$.

2. Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$:

a. $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x))$. **b.** $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x))$.

3. Simplifier pour tout $x \in [1, +\infty[$:

a. $\operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x))$. **b.** $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))$.

5 **1.** Simplifier pour tout $x \in [-1, 1]$:

a. $\sin(\arcsin(x))$. **b.** $\cos(\operatorname{acos}(x))$.

c. $\sin(\operatorname{acos}(x))$. **d.** $\cos(\operatorname{asin}(x))$.

2. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on les égalités suivantes ?

a. $\operatorname{asin}(\sin(x)) = x$.

b. $\operatorname{acos}(\cos(x)) = x$.

6 Vérifier les dérivées et limites de ch, sh et th vues aux propositions 10 et 11.

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

1 Démontrer le corollaire 1.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Peut-on définir sur $\mathbb{R}$ la fonction « racine n-ième » : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ comme réciproque de la fonction $p_n : x \mapsto x^n$?

3 Démontrer les propositions 5 et 6.

4 **a.** Montrer que :
$\forall x \in \,]-1,\, 1[,\ \operatorname{argth}(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}.$
b. Montrer que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$
c. Montrer que :
$\forall x \in [1, +\infty[,\ \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$

5 Démontrer la proposition 8 (en utilisant évidemment la proposition 7).

6 Soit $\alpha > 0$. On a vu que l'on pouvait prolonger par continuité en 0 la fonction « puissance α » en posant $0^\alpha = 0$. La fonction ainsi obtenue est-elle dérivable en 0 ?

7 Démontrer la proposition 13.

8 Déterminer les limites suivantes (on pourra penser à utiliser une dérivée).

a. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right).$ **b.** $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right).$

© Nathan, *classe prépa*