11 – Transformations du plan et de l'espace

Avant la colle

Tester ses connaissances

E est un espace euclidien de dimension n (où $n \in \{2, 3\}$ est précisé si nécessaire).

1 Soit f une isométrie de E.
Montrer que f est une symétrie centrale si, et seulement si, la partie linéaire de f est égale à $-\mathrm{Id}_E$.

2 Si f est une isométrie de E et O un point donné, montrer qu'il existe une unique translation t et une unique isométrie g telles que $g(O) = O$ et $f = t \circ g$.

3 On suppose que $n = 2$. Soit A et B deux points distincts de E et I le milieu du segment $[AB]$.
Soit s la réflexion affine d'axe (AB).
Si $M \in E$, exprimer $\overrightarrow{Ms(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{AB}$.

4 On suppose que $n = 2$. Soit A et B deux points distincts de E et I le milieu du segment $[AB]$. Soit s la réflexion affine telle que $s(A) = B$.
Si $M \in E$, exprimer $\overrightarrow{Ms(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{AB}$.

5 Si f est une isométrie de E telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \neq \mathrm{Id}_E$, montrer que f est une symétrie orthogonale.
(Introduire le milieu du segment $[Af(A)]$ où A est un point de E.)

6 On suppose que $n = 3$.
Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de E et f et g deux isométries de E telles que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$, $f(C) = g(C)$ et $f(D) = g(D)$.
Montrer que $f = g$ (on introduira $h = g^{-1} \circ f$).

7 Soit E un espace euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, k)$.
On note $A(0, 0, 2)$ et $B(0, -1, 1)$.

a. Montrer qu'il existe un et un seul retournement affine f tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$. Caractériser géométriquement ce retournement.

b. Donner les coordonnées de l'image du point $M(x, y, z)$ par f.

8 Soit E un espace euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, k)$.
Soit s la réflexion affine qui échange les points $A(1, 1, 1)$ et $B(3, -1, -1)$.
Donner les coordonnées de l'image du point $M(x, y, z)$ par s.

9 Déterminer les similitudes directes involutives (telles que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$).

Savoir appliquer le cours

1 Soit dans un plan euclidien orienté, un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle Γ. Soit M un point de Γ distinct de A et C situé sur celui des arcs $\widehat{AC}$ ne contenant pas B. On note I le point du segment $[MB]$ tel que $MI = MA$.
Donner la nature du triangle IMA.
En introduisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, montrer que $MA + MC = MB$.

2 Caractériser la transformation f du plan qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = 4\cos(t) - x\cos(2t) - y\sin(2t) \\ y' = 4\sin(t) - x\sin(2t) + y\cos(2t) \end{cases}$$

où t est un réel fixé.

3 Donner l'image d'une conique $\mathscr{C}$ par une similitude.

4 Soit E un plan euclidien orienté. Soit σ et σ' deux similitudes directes différentes de Id_E.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$.

5 Soit s_1 une similitude directe de centre O et deux points A et B distincts. On note $s_1(A) = A'$ et $s_1(B) = B'$.
La similitude directe s_2 de centre A qui transforme B en B' transforme O en P.
La similitude directe s_3 de centre B qui transforme A en A' transforme O en Q.
Montrer que O est le milieu du segment $[PQ]$.

6 Soit A, B, B' et A' des points deux à deux distincts qui ne sont pas les sommets d'un parallélogramme.
Montrer que les similitudes directes σ et σ' telles que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$, $\sigma'(A) = B$ et $\sigma'(A') = B'$ sont des similitudes à centre et comparer ces centres.

7 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, k)$ un repère orthonormal direct de E.
On note $\mathscr{P}$ le plan affine d'équation $x + y + z = 3$ et $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(0, 3, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{j} - k$.

1. Montrer que $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$.

2. On note s la réflexion affine par rapport au plan $\mathscr{P}$. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}_1$ tel que la symétrie σ d'axe $\mathscr{D}$ soit égale à $s \circ s_1$ où s_1 est la réflexion affine par rapport au plan $\mathscr{P}_1$.

3. Soit $\mathscr{P}_2$ le plan parallèle au plan $\mathscr{P}_1$ passant par O. Donner une équation du plan $\mathscr{P}_2$ et les coordonnées de l'image de A par la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}_2$.

4. On note s_2 la réflexion affine par rapport au plan $\mathscr{P}_2$. Déterminer $s_2 \circ s_1$.