10 – Coniques

Avant la colle

Tester ses connaissances

Dans tous les exercices, le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 L'hyperbole $\mathcal{C}$ d'équation $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ admet une directrice d'équation :

- ☐ **a.** $x = \frac{e}{a}$.
- ☐ **b.** $x = ae$.
- ☐ **c.** $y = \frac{a}{e}$.
- ☐ **d.** $y = ae$.

2 Donner l'excentricité d'une hyperbole équilatère.

3 Déterminer une équation cartésienne de la tangente en $M(\theta)$ à la courbe d'équation polaire :

$$\rho = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}.$$

4 Écrire l'équation réduite d'une ellipse de centre O, de directrice d'équation $x = 4$, telle que la longueur du grand axe soit le double de la longueur du petit axe.

5 Écrire l'équation réduite d'une parabole de sommet $\Omega(1, 0)$ et de foyer $F(-1, 0)$.

6 Écrire une équation de l'hyperbole de centre O d'axe focal $y'Oy$, d'excentricité 2 et telle que la distance d'un foyer à une directrice soit égale à 3.

7 Écrire une équation de l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que $MA + MB = 4$ lorsque $A(1, 0)$ et $B(-1, 0)$.

8 Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et M le point de coordonnées $(a\cos t, b\sin t)$ où $\sin(t)\cos(t) \neq 0$.
Trouver le point d'intersection de la tangente en M à l'ellipse et de la tangente en $M_1(a\cos t, a\sin t)$ au cercle Γ de centre O et de rayon a.
En déduire une construction de M et de la tangente en M à $\mathcal{C}$.

9 Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des centres des cercles passant par A et tangents à $\mathcal{D}$.

10 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ soit une hyperbole équilatère (on suppose $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$).

Savoir appliquer le cours

1 Donner une équation polaire de l'hyperbole équilatère de foyer O et de directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x+y=1$.

2 Caractériser la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire :
$$\rho = \frac{4}{1+3\cos\theta - 4\sin\theta}.$$

3 Soit, si $e \neq 1$, la conique d'équation polaire :
$$\rho = \frac{ed}{1+e\cos\theta}.$$
Déterminer les coordonnées cartésiennes du deuxième foyer et l'équation de la directrice associée.

4 **1.** Reconnaître la conique $\mathcal{C}$ d'équation :
$$9x^2+4y^2-18x+16y-11=0.$$
Préciser ses éléments caractéristiques et la représenter.

2. Mêmes questions pour :
$$4x^2-9y^2+8x+54y-41=0.$$

5 Donner une équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $13x^2-32xy+37y^2=5$.
En donner les éléments caractéristiques et la représenter.

6 Donner une équation réduite de la courbe d'équation $3y^2-3x^2+8xy+5=0$.
Donner ses éléments caractéristiques et la représenter.

7 Donner une équation réduite de la courbe d'équation :
$$9x^2-24xy+16y^2-10x-20y-7=0.$$
Donner une équation de son axe focal et la représenter.

8 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2=2px$ et F son foyer. Soit $M(t)$ le point de $\mathcal{P}$ d'ordonnée égale à pt et $\mathcal{D}_t$ la tangente en $M(t)$ à $\mathcal{P}$.

1. Soit H la projection orthogonale de $M(t)$ sur la directrice de $\mathcal{P}$.
Montrer que la tangente en $M(t)$ à la parabole est la médiatrice du segment $[FH]$ et la bissectrice de l'angle $(FM(t)H)$.

2. On suppose que $t \neq 0$. On note T le point d'intersection de la directrice et de la tangente $\mathcal{D}_t$. Quelle est la nature du triangle $M(t)FT$?