

9 – Géométrie élémentaire

Avant la colle

Tester ses connaissances

Dans les exercices 1 à 5, on se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct noté $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1 Soit $A(1, 1, 0)$ et $B(2, 3, -1)$. La droite (AB) est parallèle au plan d'équation $x + 2y + \lambda z - 3 = 0$ si, et seulement si :
- a. $\lambda = 5$; b. $\lambda = 2$.

- 2 La droite \mathcal{D} d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z - 2 = 0 \\ 3x - y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

est orthogonale au plan \mathcal{P} d'équation $x + \lambda y + z + 1 = 0$ lorsque :

- a. $\lambda = -1$; b. $\lambda = 0$.

- 3 Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 3x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x - y - 5z + 6 = 0 \end{cases}$$

sont :

- a. parallèles ; b. sécantes ;
c. non coplanaires.

- 4 $y = ax + b$ est l'équation de la droite (AB) avec $A(1, a + b, 0)$ et $B(0, b, 0)$.

a. Vrai b. Faux.

- 5 Donner un système d'équations cartésiennes de la droite symétrique de la droite (AB) avec $A(1, 1, 1)$ et $B(1, 2, 3)$ par rapport au plan \mathcal{P} d'équation $x + y + z = 0$.

- 6 On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct noté $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la droite \mathcal{D} d'équation $x + \alpha y + 4 = 0$ soit tangente au cercle \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$. Déterminer alors le point d'intersection de la tangente et du cercle \mathcal{C} .

Savoir appliquer le cours

1 On se place dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$. On introduit les points $A(2, 0)$, $B(1, 1)$ et $C(0, -1)$.

a. Déterminer l'aire du triangle ABC .

b. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G , de l'orthocentre H et du centre Ω du cercle Γ circonscrit au triangle ABC . Montrer que ces trois points sont alignés.

c. Écrire une équation du cercle Γ .

d. Soit $M(a, b)$ un point du plan. Déterminer les coordonnées des projections orthogonales A' , B' et C' de M sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) du triangle ABC . Montrer que les points A' , B' et C' sont alignés si, et seulement si, le point M est un point de Γ .

Dans les exercices 2 à 5, on se place dans l'espace E rapporté à un repère orthonormal direct

$\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2 Donner une équation de la sphère de centre $A(1, -2, 3)$, tangente au plan \mathcal{P} d'équation $x + y + z + 4 = 0$.

3 Calculer $\text{Det}(\vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u}, \vec{u} + \vec{v})$ en fonction de $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

4 Déterminer une droite Δ passant par O , orthogonale à la droite \mathcal{D} d'équations

$$\begin{cases} x + 2 = -2z \\ y = 3x + z \end{cases} \text{ et coupant cette droite } \mathcal{D}.$$

5 (D'après oral CCP PC)

On donne les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' d'équations :

$$\mathcal{D} \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{D}' \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Donner un système d'équations de la perpendiculaire commune à \mathcal{D} et \mathcal{D}' et calculer la distance entre \mathcal{D} et \mathcal{D}' .