7 – Systèmes linéaires – Déterminants

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. Si $p > n$, (S) admet au moins une solution.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

2 $\det(A + B) = \det A + \det B$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

3 **1.** Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\det(-A) = -\det A$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

2. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(-A) = -\det A$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

4 Si A est une matrice carrée d'ordre 2, montrer que $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)\mathrm{I}_2 = 0$.

Lorsque A est inversible, en déduire la valeur de A^{-1} en fonction de A et I_2.

5 Que vaut le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre 3 ?

6 Existe-t-il des réels a et b tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ -2 & 0 & 2b \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$ soit inversible ?

7 Si E est un espace de dimension finie et si f est un endomorphisme de E, il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E telles que :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \neq \det_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{C})).$$

☐ **a.** Vrai ☐ **b.** Faux.

Savoir appliquer le cours

1 Par la méthode du pivot de Gauss, montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -9 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et préciser son inverse.

2 En résolvant l'équation $AX = 0$ où $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$, déterminer le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

3 Résoudre le système suivant en fonction du paramètre réel λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ (2\lambda + 1)x + 3y + (\lambda + 2)z = 3 \end{cases}$$

4 Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur le scalaire λ pour que

$$\mathcal{B}' = (e_1 + \lambda e_2, e_2 + \lambda e_3, e_3 + \lambda e_1)$$

soit aussi une base de E.

5 Après avoir justifié que les applications suivantes sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$, calculer leur déterminant.

1. $f : P \mapsto Q$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. $g : P \mapsto (X^2 - 1)P' - 2(X + 3)P$.

6 Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

7 Soit $n \in \{2, 3\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + \mathrm{I}_n = 0$. Calculer $\det(A)$.