6 – Matrices

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Dans chacun des cas suivants, dire si le produit AB est défini et préciser le type de AB le cas échéant :

a. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
B est une matrice colonne à p lignes.

b. A est une matrice ligne à n colonnes ;
B est une matrice colonne à n lignes.

c. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
B est une matrice ligne à n colonnes.

d. A est une matrice ligne à n colonnes ;
$B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2 Soit A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $AB = 0 \Longrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

2. $AC = BC \Longrightarrow A = B$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

3 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que : $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX$.
Montrer que $A = B$.

4 Soit $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si p, q, r, s appartiennent à $[\![1, n]\!]$, calculer le produit $E_{pq}E_{rs}$.

5 Soit $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
et $D' = \mathrm{diag}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$
deux matrices diagonales d'ordre n.

a. Que vaut DD' ?

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que D soit inversible. Que vaut alors D^{-1} ?

6 Montrer que l'ensemble des matrices antisymétriques et l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

7 Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension :

☐ **a.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

☐ **b.** $\dfrac{n^2}{2}$.

☐ **c.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

8 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par
$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P + P'.$$

1. Écrire la matrice M de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Montrer que M est inversible et préciser son inverse.

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

1 Si A est une matrice carrée, on appelle trace de A le scalaire noté $\mathrm{Tr}(A)$ égal à la somme des éléments diagonaux de A :

$$\text{si } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}},\quad \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est une forme linéaire.

2. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

3. En déduire qu'il n'existe pas de matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = \mathrm{I}_n$.

2 Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on note
$$f(P) = (X-1)\left[P - \frac{1}{6}(X-1)^3 P^{(3)}\right].$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Si $k \in [\![0, 3]\!]$, on note $Q_k = (X-1)^k$. Vérifier que $\mathcal{B} = (Q_0, \ldots, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.

4. En déduire l'image et le noyau de f.

3 Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments valent 1. On note I la matrice unité d'ordre n et

$F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \exists (a, b) \in \mathbb{K}^2,\ M = aA + b\mathrm{I}\}$.

1. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable pour la multiplication et en donner une base.

2. Pour tout entier naturel p non nul, calculer A^p puis M^p lorsque $M \in F$.

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité d'ordre 3.

1. a. Exprimer A^2 en fonction de A et I.

b. Montrer que A est inversible et préciser son inverse.

2. On considère l'équation matricielle

$$(E) :\ AX + XA = \mathrm{I},$$

d'inconnue X appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

a. Si X est solution de (E), montrer que A^2 et X commutent, puis que A et X commutent.

b. En déduire que (E) admet une unique solution que l'on précisera.

5 Soit A un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = 0$.

Pour tout réel t, on pose $E(t) = \mathrm{I} + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$ où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

1. Montrer que :

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2,\ E(t)E(t') = E(t+t').$$

2. En déduire que pour tout réel t, $E(t)$ est inversible et préciser son inverse (en fonction de t et A).

3. Pour tout réel t et tout entier naturel n, calculer $(E(t))^n$ en fonction de t, n et A.

4. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que B est inversible, calculer son inverse et B^n, où n est un entier naturel.

6 Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} / ((a, b, c) \in \mathbb{R}^3) \right\}$.

1. Montrer que E est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on précisera une base et la dimension.

2. Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

3. Soit A un élément inversible de E.
En considérant l'application φ définie sur E par $\varphi(M) = AM$, montrer que $A^{-1} \in E$.

4. $(E, +, \times)$ est-il un corps ?

© Nathan, *classe prépa*