5 – Espaces vectoriels de dimension finie

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et a un vecteur de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la famille (a) soit libre.

2 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

a. Toute famille contenant une famille libre est libre.

b. Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

3 On considère l'espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Les éléments suivants forment-ils une famille libre dans E ?

a. $f : x \mapsto x+3$, $\quad g : x \mapsto 2x-1$ et $h : x \mapsto 3x$.

b. $f : x \mapsto x$, $\quad g : x \mapsto x(x-1)$. et $h : x \mapsto x(x-1)(x-2)$.

c. $f : x \mapsto |x|$, $\quad g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto x+1$.

4 Soient a un complexe et n un entier.
Justifier que la famille
$\mathscr{B} = (1, \mathrm{X}-a, (\mathrm{X}-a)^2, \ldots, (\mathrm{X}-a)^n)$
est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

5 Montrer que les ensembles suivants sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ et en préciser une base.

a. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x-2y+z = 0$ et $2x+3y-z = 0\}$.

b. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x-4y+z = 0\}$.

c. $\{(a+b, a+b+c, b, a-c) / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

6 Déterminer une base du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^5$ défini par :
$E = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$.

7 Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de même dimension finie, toute application linéaire injective de E dans F est surjective.

- [ ] **a.** Vrai.
- [ ] **b.** Faux.

8 Si E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

- [ ] **a.** Vrai.
- [ ] **b.** Faux.

9 **1.** Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et si $p < n$, f n'est pas surjective.

- [ ] **a.** Vrai.
- [ ] **b.** Faux.

2. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et si $p > n$, f n'est pas injective.

- [ ] **a.** Vrai.
- [ ] **b.** Faux.

10 Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n, où $n \geqslant 1$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) > n$.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

11 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n, F un $\mathbb{K}$-e.v. et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Montrer que si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\operatorname{Ker} u$ et si $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E, $(u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

12 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
S'il existe un entier p strictement positif et des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ tels que
$\alpha_0 \neq 0$ et $\alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_p u^p = 0$,
montrer que u est un automorphisme de E et donner son inverse.

Savoir appliquer le cours

1 Soit $u = (3, 2, 1, 4)$, $v = (-1, 0, 1, 2)$ et $w = (1, 1, 1, 3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Quel est le rang de la famille (u, v, w) ?

2 Démontrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.

3 Soit a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Montrer que $((X-a)^i(X-b)^{n-i})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

4 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v, $S = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre dans E avec $n \geqslant 2$, u et v deux vecteurs de E.
Montrer que si les familles
$S_u = (e_1, \ldots, e_n, u)$ et $S_v = (e_1, \ldots, e_n, v)$ sont toutes deux liées,
$S' = (e_2, \ldots, e_n, u, v)$ est une famille liée.

5 Montrer qu'il existe un unique endomorphisme φ de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :
$\varphi(1) = X - 1$, $\varphi(X+1) = X^3 - 1$,
$\varphi(X^2+X+1) = -1$
et $\varphi(X^3+X^2+X+1) = X^2 - 1$.
Que dire de l'application φ ainsi définie?

6 Montrer que l'application suivante est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont on précisera l'inverse :

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,$$
$$(x, y, z, t) \mapsto (y, x-y, 2t, x+z).$$

7 Soit $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $(x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ où

$$\begin{cases} X = 3x - y + z \\ Y = x - 3y - z \\ Z = x + 5y + 3z \end{cases}$$

a. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$.

b. Donner une base du noyau et de l'image de f.

8 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E tels que :
$E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ et $E = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g$.
Montrer que les sommes précédentes sont directes.

9 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n, $n \geqslant 2$.
On appelle transvection de E tout endomorphisme g de E vérifiant les deux propriétés suivantes :
(1) $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$ est un hyperplan de E ;
(2) $\mathrm{Im}(g - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$.
a. Montrer que si g est une transvection de E, $\mathrm{Im}(g - \mathrm{Id}_E)$ est une droite vectorielle.
On dit que $\mathrm{Im}(g - \mathrm{Id}_E)$ est la droite et $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$ l'hyperplan de la transvection.
Dans ce cas, montrer que $g^2 - 2g + \mathrm{Id}_E = 0$, en déduire que g est inversible et préciser g^{-1}.
b. On considère une forme linéaire f sur E non nulle et u un vecteur non nul dans le noyau de f.
On pose alors $\forall x \in E$, $h(x) = x + f(x)u$.
Montrer que h est une transvection de E dont on précisera la droite et l'hyperplan.

10 Soient n un entier strictement positif, $(a_1, \ldots, a_n)$ des éléments deux à deux distincts dans $\mathbb{K}$ et

$$\varphi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}^n,$$
$$P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n)).$$

a. Montrer que φ est un isomorphisme.
b. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, déterminer $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$ et montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
c. Montrer que pour toute fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, il existe un et un seul polynôme P dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $P(a_i) = f(a_i)$.