4 – Espaces vectoriels, applications linéaires

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Soit A et B deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.

1. $A \cap B$ est un sous-espace vectoriel de E.

☐ **a.** Vrai ☐ **b.** Faux.

2. $A \cup B$ est toujours un sous-espace vectoriel de E.

☐ **a.** Vrai ☐ **b.** Faux.

2 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soit a et b deux vecteurs de E et $F = \{\alpha a + \beta b / (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2\}$.
Montrer que F est un s.e.v. de E.

3 On note respectivement $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$, l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4 Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Laquelle de ces inclusions est toujours vérifiée ?

☐ **a.** $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker} f$.

☐ **b.** $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

5 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(\alpha f) = \mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im}(\alpha f) = \mathrm{Im} f$.

6 Tout automorphisme de E est un endomorphisme de E.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

7 Soit E, F et G trois espaces vectoriels.
Soit $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On considère l'application $\psi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E, G)$, $u \mapsto v \circ u$.
Montrer que ψ est linéaire.

8 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $p \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que p est un projecteur de E si, et seulement, si $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur de E.

b. Si p est un projecteur de E, montrer que :
$\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$
et $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Ker}(p)$.

Savoir appliquer le cours

1 Soit $n \geqslant 2$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$?

☐ **a.** $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 0\}$

☐ **b.** $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 1\}$

☐ **c.** $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

☐ **d.** $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 = x_2^2\}$

☐ **e.** $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 x_2 = 0\}$

☐ **f.** $\left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.

2 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

☐ **a.** L'ensemble des fonctions à valeurs positives ou nulles.

☐ **b.** L'ensemble des fonctions nulles en 0.

☐ **c.** L'ensemble des fonctions polynomiales de degré 2 exactement.

☐ **d.** L'ensemble des fonctions continues dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle.

3 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites complexes ?

- ☐ **a.** L'ensemble des suites bornées.
- ☐ **b.** L'ensemble des suites de limite nulle.
- ☐ **c.** L'ensemble des suites divergentes.

4 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de E ?

- ☐ **a.** $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\quad u : f \mapsto 2f$.
- ☐ **b.** $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\quad u : f \mapsto f \circ f$.
- ☐ **c.** $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\quad u : f \mapsto f'$.
- ☐ **d.** $E = \mathbb{R}^2$, $\quad u : (x, y) \mapsto (x+y, x-y)$.

5 Les applications suivantes sont-elles des formes linéaires sur E ?

- ☐ **a.** $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u : f \mapsto f(a)$ où a est un réel fixé.
- ☐ **b.** $E = \mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{R})$, $u : f \mapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ où a et b sont deux réels fixés, $a < b$.

6 Soit $n \geqslant 2$. Montrer que l'application
$u : P \mapsto X(1-X)P'' - (2X-1)P'$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

7 Soient E, F et G trois espaces vectoriels.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Démontrer l'équivalence suivante :

$$v \circ u = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v.$$

8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g = g \circ f.$$

Un sous-espace vectoriel F est dit stable par g lorsque $g(F) \subset F$.
Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

9 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Montrer que si f et g sont deux formes linéaires sur E telles que :

$$\forall x \in E,\ f(x)g(x) = 0,$$

alors f ou g est nulle.

10 Soit f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$(x, y) \mapsto (4x - 6y, 2x - 3y)$.
Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.
Préciser son image et son noyau.