1 – Nombres complexes

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Écrire la forme trigonométrique du complexe $a(\cos b + i\sin b)$ où a est réel.

2 Les racines $2n$-ièmes de 1 sont les complexes $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ où :

☐ **a.** k est un entier de $[\![0,\ n-1]\!]$;

☐ **b.** k est un entier de $[\![0,\ 2n]\!]$;

☐ **c.** k est un entier de $[\![-n+1,\ n]\!]$.

3 Si $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et si $p \in \mathbb{Z}$, calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

4 Si a et b sont des réels et $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$, démontrer que : $a + bj = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$.

5 Redémontrer l'inégalité triangulaire.
En déduire, si z et z' sont des complexes, que :

$$||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|.$$

6 Si μ est un complexe non nul, les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - \mu z + \mu^2 = 0$ sont :

☐ **a.** $-\mu j$ et $-\mu j^2$.

☐ **b.** μj et $\mu \bar{j}$.

7 z est un imaginaire pur si, et seulement si :

☐ **a.** $\operatorname{Arg} z \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)$.

☐ **b.** z^2 est un réel négatif ou nul.

Savoir appliquer le cours

1 Trouver la forme trigonométrique des complexes :

a. $\left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i}\right)^n$.

b. $(1 + \cos\theta - i\sin\theta)^n$ si $\theta \in [0,\ 2\pi[$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$2z^2 - (9i+1)z - 7 + 11i = 0.$$

3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$Z^{2n} - 2Z^n \sin(t) + 1 = 0$, où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

4 Si z est un complexe de module différent de 1, et si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

5 Si a, b et c sont trois complexes de module 1, démontrer que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

6 Résoudre, lorsque z est un complexe, l'équation : $8e^{4z} + 8e^{3z} + e^z + 1 = 0$.

7 Calculer les racines cubiques de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Les écrire sous forme cartésienne et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

8 Calculer, si x et y sont réels et $n \in \mathbb{N}$:

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos(ky + x) \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{n} \sin(ky + x).$$

9 Si a et b sont deux complexes distincts de module 1, montrer que, pour tout complexe z, le complexe u défini par :

$$u = \frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{b-a}$$

vérifie $u^2 \leqslant 0$.

2 – Nombres entiers et structures algébriques usuelles

Avant la colle

Tester ses connaissances

1 Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E, si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$, $B \subset C$:

☐ **a.** Vrai.

☐ **b.** Faux.

2 Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

a. Si $g \circ f$ est injective, montrer que f est injective. g est-elle injective ?

b. Si $g \circ f$ est surjective, montrer que g est surjective. f est-elle surjective?

3 Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{N})^2$ où f et g sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$,

$g(2n) = n$ et $g(2n+1) = 0$.

f (resp. g) est-elle injective ? surjective ?

Calculer $g \circ f$.

4 Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$,

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$:

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

5 Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(C_E A) = C_F f(A)$:

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

2. $\forall B \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(C_F B) = C_E f^{-1}(B)$:

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

6 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On définit sur $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ la relation $\leqslant$ par :

si $(f, g) \in E^2$,

$$f \leqslant g \iff \forall x \in I, \ f(x) \leqslant g(x).$$

a. Montrer que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E.

b. L'ordre est-il total ?

7 Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ admettant un plus grand élément.

1. $f(\mathcal{D})$ admet un plus grand élément :

☐ **a.** Vrai.

☐ **b.** Faux.

2. Si $f^{-1}(\mathcal{D}) \neq \varnothing$, $f^{-1}(\mathcal{D})$ admet un plus grand élément :

☐ **a.** Vrai.

☐ **b.** Faux.

8 Déterminer tous les entiers naturels tels que le quotient de la division euclidienne par 7 soit le double du reste de la division par 7.

9 Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a - b > 0$. On divise a et b par $a - b$. Comparer les quotients et les restes.

10 Soit $a = 15\,876$. Quel est le plus petit entier naturel non nul b tel que ab soit un cube ?

11 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

Montrer qu'aucun des entiers $n! + k$ où $k \in [\![2, n]\!]$ n'est premier.

Comment obtenir n entiers consécutifs non premiers ?

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Quel est le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $F = \{a, b\}$?

b. Quel est le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$?

c. Quel est le nombre d'applications non surjectives de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Savoir appliquer le cours

1. Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

2 On note $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $f : U \to U,\ (x, y) \mapsto \left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$.
f est-elle injective ? surjective ?

3 Soit f une application de E dans F, montrer que f est surjective si, et seulement si,
$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\quad f(f^{-1}(B)) = B.$$

4 Soit f une application de E dans E.
On note $X = \{A \in \mathcal{P}(E) / f^{-1}(f(A)) = A\}$.

1. Montrer que $E \in X$.

2. Si A et B sont deux éléments de X, montrer que $A \cup B \in X$.

3. Si A et B sont deux éléments de X, montrer que $A \cap B \in X$.

4. Montrer que $X = \mathcal{P}(E)$ si, et seulement si, f est injective.

5 Soit $(E, \leqslant)$ et $(F, \leqslant)$ deux ensembles totalement ordonnés.
On note, si $(x, x') \in E^2$,
$$x < x' \iff x \leqslant x' \text{ et } x \neq x'.$$
On définit sur $G = E \times F$ une relation $\mathcal{R}$ par $(x, y)\ \mathcal{R}(x', y') \iff x < x'$ ou $(x = x' \text{ et } y \leqslant y')$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur G.

6 Soit $E =]-1, 1[$; on définit la loi $*$ par :
$$\forall (x, y) \in E^2,\quad x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

1. Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

2. En utilisant $\varphi : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$, montrer que $(E, *)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

7 Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

1. On note $\mathcal{C} = \{a \in G / \forall x \in G,\ ax = xa\}$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-groupe de G.

2. Soit $a \in G$.
On note $\varphi_a : G \to G,\ x \mapsto axa^{-1}$.
Montrer que φ_a est un automorphisme du groupe $(G, \cdot)$.

3. On note $(\mathcal{B}(G), \circ)$ le groupe des bijections de G. Soit $\theta : G \to \mathcal{B}(G),\ a \mapsto \varphi_a$.
Montrer que θ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

8 Montrer que si a est un entier impair, 2^{n+1} divise $a^{2^n} - 1$.

9 Soit p et q des nombres premiers distincts et α et β des entiers naturels non nuls.
Soit $n = p^{\alpha} q^{\beta}$.

1. Calculer le nombre N des diviseurs strictement positifs de n.

2. Exprimer le produit des diviseurs strictement positifs de n en fonction de n et N.

3. Pour quel(s) entier(s) naturel(s), le produit des diviseurs strictement positifs est-il égal à 20^{42} ?

10 Soit E un ensemble de cardinal $n > 0$.
Combien y a-t-il de couples (X, Y) de $\mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?

11 Soit k un entier compris entre 0 et n, démontrer que $\dbinom{2n}{k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i}$.