10 – Fonctions de deux variables

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 326*

1 Si les applications partielles de f en (a, b) sont continues en a et b respectivement, f est continue en (a, b) :

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

2 Si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0, 0)$, f est continue en $(0, 0)$:

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

3 Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite ℓ en (a, b).

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite qui converge vers a et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ une suite qui converge vers b telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n, v_n) \in A$.

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n, v_n) = \ell$.

4 Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = f(y, x),$$

montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(b, a).$$

En déduire une propriété de $\mathrm{D}_h f$ où $h \in \mathbb{R}^2$.

5 **a.** Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

b. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0.$$

c. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

6 **a.** Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; calculer la dérivée de

$$F : x \mapsto f(\mathrm{e}^{3x}, x^2).$$

b. Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $G : (x, y) \mapsto g(y^2 x^3)$.

c. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $H(x, y) = f\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right), x^y\right)$.

7 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et k un réel. Calculer les dérivées partielles de $g : (x, y) \mapsto f(x, y)\mathrm{e}^{kx}$.

En déduire l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Savoir appliquer le cours

➤ *Corrigés p. 328*

1 Étudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes.

a. $(x, y) \mapsto \dfrac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}$.

b. $(x, y) \mapsto \dfrac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$.

c. $(x, y) \mapsto \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

d. $(x, y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^4 + y^2}$.

e. $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

2 On pose $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = x^3 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b. Calculer les dérivées partielles de f.
c. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

3 **a.** Étudier le signe sur $\mathbb{R}^+$ de

$$u : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-1}.$$

b. Soit $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Déterminer l'ensemble des points critiques de

$$f : U \mapsto \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{y} + y\mathrm{e}^{-1}.$$

c. Étudier les extremums locaux de f (on exprimera $f(x, y) - 2\mathrm{e}^{-1}$ en fonction de $u(x)$ et de y).

4 Calculer les intégrales doubles suivantes.

a. $\iint_{\mathcal{D}} x\mathrm{e}^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) / x^2 \leqslant y \leqslant x\}$.

b. $\iint_{\mathcal{D}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) / x^2 \leqslant y \leqslant 2 \text{ et } xy \geqslant 1\}$.

c. $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

5 On pose $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = xy\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right).$$

a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en tout point de $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en $(0, 0)$.

c. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
Conclure.