

9 – Courbes paramétrées planes

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigé p. 289

- 1 Déterminer une équation de la tangente et de la normale (droite orthogonale en ce point à la tangente) en tout point régulier de la

courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

- 2 En tout point différent du pôle de la courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, déterminer une équation de la tangente et de la normale dans le repère polaire.

- 3 Déterminer une équation polaire d'une droite, puis d'un cercle passant par le pôle O .

- 4 Donner un intervalle de longueur minimum sur lequel on doit étudier chacune des courbes définies ci-dessous et expliquer comment obtenir la courbe complète à partir de l'arc initial :

a. $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$ (astroïde).

b. $x = \sin(t) + \cos(t)$, $y = \cos(2t)$.

c. $\rho = 1 + \cos^2(\theta)$.

d. $\rho = \sin(\theta)(1 + \cos(2\theta))$.

e. $\rho = 1 + 2\cos(3\theta)$.

- 5 Reconnaître les supports des courbes paramétrées définies par :

a. $x = 4t^2 + 1$ et $y = 3t^2 - 2$.

b. $x = 2t^2 - 2t + 1$ et $y = (3t^2 - 3t + 1)^2$.

c. $x = 2\cos^2(t) + 3$ et $y = \sin(2t) - 4$.

d. $x = t + \sqrt{t^2 + 1}$ et $y = t - \sqrt{t^2 + 1}$.

- 6 Reconnaître les supports des courbes d'équation polaire :

a. $\rho^2 \sin(2\theta) = 1$.

b. $\rho = -2\cos(\theta) - 2\sin(\theta)$.

c. $\rho \sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(\theta) + \cos(\theta)$.

d. $\cos^2(\theta)\rho = \sin(\theta)$.

- 7 Deuxième période Retrouver l'expression du rayon de courbure en un point birégulier de

- a. la courbe paramétrée définie par :

$$F: t \mapsto x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

- b. la courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$.

1 Donner une équation de la tangente aux points stationnaires des courbes définies par :

a. $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$ où $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. $x = \frac{t^2 + 1}{t}$, $y = t^2 - 2t + 2$.

c. $x = t^2 - \frac{2}{t}$, $y = t + \frac{1}{t}$.

2 Soit la courbe paramétrée définie par :

$$x = t^2 + \frac{2}{t} \text{ et } y = (t+1)^2 + \frac{1}{t}.$$

a. Étudier la branche infinie lorsque $t \rightarrow 0$.

b. Étudier le point double.

3 Deuxième période Étudier, au voisinage du point de paramètre $t = 0$, les courbes définies par :

a. $x = (t-1)^2 t^2 e^t$ et $y = t^2(t+1)^2 e^{-t}$.

b. $x = (t+1)^2 t^2 e^t$ et $y = t^2(2t+1)e^t$.

4 Deuxième période Soit la famille de courbes paramétrées définies par :

$$x = t^2 + \frac{a}{t} \text{ et } y = (t+1)^2 + \frac{b}{t} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

a. Montrer qu'il existe une seule courbe admettant un point stationnaire pour $t = 1$; étudier ce point stationnaire.

b. Étudier les points d'inflexion de cette courbe.

5 Deuxième période Calculer la longueur de l'arc $\widehat{OM}(\theta)$ (où $\theta > 0$), puis le rayon de courbure de la courbe d'équation polaire $\rho = \operatorname{th}\left(\frac{\theta}{2}\right)$.