

7 – Intégration

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 223

1 Si f est une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

2 Déterminer les limites des suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

a. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

b. $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$.

c. $w_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

d. $x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}$.

3 Soit $F(x) = \int_{1-x}^{x^2} \sqrt{t} e^t dt$.

Le domaine de définition de F est égal à :

a. $]-\infty, 1]$.

b. $[0, 1]$.

c. $[0, +\infty[$.

4 La fonction précédente F est dérivable sur son domaine de définition et $F'(x)$ est égal à :

a. $|x|e^{x^2} - \sqrt{1-x}e^{1-x}$.

b. $2|x|e^{x^2} + \sqrt{1-x}e^{1-x}$.

c. $2x^2e^{x^2} + \sqrt{1-x}e^{1-x}$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit f_n par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], f_n(x) = n \sin^n(\pi x) \cos(\pi x).$$

Pour tout x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$:

a. Vrai. **b.** Faux.

et la suite de terme général $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x) dx$ converge vers :

c. 0. **d.** $\frac{1}{\pi}$.

6 Si $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

a. Exprimer $I_{q,p}$ en fonction de $I_{p,q}$.

b. Si $q \in \mathbb{N}^*$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1, q-1}$. En déduire la valeur de $I_{p,q}$.

7 a. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ vérifiant : $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$, exprimer $\int_a^b x f(x) dx$ en fonction de $\int_a^b f(x) dx$.

b. En déduire la valeur de $\int_0^\pi x \sin^3(x) dx$.

8 a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$|e^x - 1 - x| \leq \frac{1}{2} x^2 e^{|x|}.$$

b. Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Montrer que

$$|\ln(1+x) - x| \leq 2x^2.$$

9 Si f est une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs positives ou nulles et si $I_n = \int_0^1 f^n(t) dt$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n^2 \leq I_{n-1} I_{n+1}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité au rang 1. Qu'en est-il alors au rang $n \geq 2$?

10 Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} et si f vérifie

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt,$$

montrer que f est de signe constant sur $[a, b]$.

11 Calculer une primitive des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto \cos(ax)e^{bx}$ où $(a, b) \neq (0, 0)$.

b. $x \mapsto (x^2 + 1)e^{2x}$.

c. $x \mapsto \cos^2(x) \sin^4(x)$.

1 Si $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

a. Montrer que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est une suite strictement décroissante de réels strictement positifs. En déduire qu'elle converge vers un réel L .

b. Si $n \geq 1$, trouver une relation entre W_{n+1} et W_{n-1} , en déduire la valeur de $nW_n W_{n-1}$. Donner la valeur de L .

c. Si $p \in \mathbb{N}$, calculer W_{2p} , puis W_{2p+1} .

2 Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt$.

a. Justifier l'existence de I_n .

b. Calculer I_n .

3 (d'après oral CCP)

Si $n \in \mathbb{N}$ et si $x \in \mathbb{R}$, on note

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

a. Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

b. En intégrant $I_n(x)$ par parties, déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.

c. On note $J_n = I_n(1)$.
Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n2^n J_n = +\infty$.

En déduire que J_n, J_{n+1} .