6 – Développements limités – Applications

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 185*

1 Si au voisinage de 0,

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

et $\quad g(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$,

on peut en déduire que :

a. $f(x)g(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$;

b. $f(x)g(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + o(x^3)$;

c. $f(x)g(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{12}x^5 + o(x^5)$.

2 On pose $f(x) = \exp(\sqrt{1+4x})$.
Le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit :

a. $f(x) = \mathrm{e}(1 + 2x - 2x^2 + o(x^2))$;

b. $f(x) = \mathrm{e}(1 + 2x + o(x^2))$;

c. $f(x) = 2 + 2x + o(x^2)$;

d. $f(x) = 1 + 2x + o(x^2)$.

3 Si $x \neq 0$, on pose $f(x) = x + 2x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Au voisinage de 0 :

1. $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

2. $f'(x) = 1 + 4x + o(x)$.

☐ **c.** Vrai. ☐ **d.** Faux.

4 Si f admet un développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, f est n fois dérivable en 0 et, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$:

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

5 Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est impaire, f est impaire.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité de f à l'ordre indiqué au voisinage de 0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = \mathrm{ch}(x)$, à l'ordre $2n+1$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, à l'ordre n.

3. $f(x) = \mathrm{Argsh}(x)$, à l'ordre $2n+2$.

4. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$, à l'ordre n.

Savoir appliquer le cours

➤ Corrigés p 187

1 Déterminer le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0 dans les cas suivants :

a. $f(x) = \ln(1+\sin(x))$ et $n = 5$.

b. $f(x) = \exp(\cos(x))$ et $n = 5$.

c. $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos(2x)}$ et $n = 3$.

d. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ et $n = 3$.

e. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ et $n = 3$.

2 Déterminer le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de a dans les cas suivants :

a. $f(x) = x^x$, $a = 1$ et $n = 3$.

b. $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$, $a = \mathrm{e}$ et $n = 3$.

c. $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x)$, $a = \dfrac{1}{2}$ et $n = 2$.

3 Déterminer le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0 dans les cas suivants :

a. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

b. $f(x) = \tan(x)$ et $n = 7$.

c. $f(x) = \ln(\cos(x))$ et $n = 8$.

4 On pose :

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4(x)}\left[\sin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\right].$$

Montrer que f admet une limite en 0 et la calculer.

5 Soit f l'application définie sur $]-1, +\infty[\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.

a. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f le prolongement ainsi obtenu.

b. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet une tangente au point d'abscisse 0, en déterminer une équation et étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de cette tangente.

6 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x).$$

En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, étudier les branches infinies éventuelles de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au voisinage de l'infini.