5 – Dérivation

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *corrigés p. 161*

1 Étudier la limite de f en a dans les cas suivants :

a. $f(x) = \dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{x - \frac{\pi}{4}}, \quad a = \dfrac{\pi}{4}$.

b. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{\mathrm{e}}}{\ln(x) - 1}, \quad a = \mathrm{e}$.

2 Étudier la dérivabilité de l'application f définie par :
$f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \ f(x) = \dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}}$
et calculer sa dérivée.

3 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes.

a. $f(x) = x^x$.

b. $f(x) = \ln|\ln x|$.

c. $f(x) = x|x|$.

d. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

4 Soit a un réel. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la dérivée n-ième de la fonction définie :

a. sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{a - x}$.

b. sur $\mathbb{R}\backslash\{-a\}$ par $g(x) = \dfrac{1}{a + x}$.

c. sur $]-a, +\infty[$ par $h(x) = \ln(a + x)$.

d. sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin^2(x)$.

e. sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(x)\mathrm{e}^{-x}$.

5 Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la dérivée n-ième de l'application f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^{n-1}\ln(x).$$

6 Soit f et g deux applications dérivables sur un intervalle I telles que $\forall x \in I, \ g(x) \neq 0$ et $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$.
Montrer qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall x \in I, \ f(x) = \lambda g(x).$$

7 Si $f = \dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et si $\alpha \in \mathcal{D}$ est tel que $f'(\alpha) = 0$ et $v'(\alpha) \neq 0$, montrer que :

$$f(\alpha) = \frac{u'(\alpha)}{v'(\alpha)}.$$

8 PC/PSI Établir les inégalités suivantes :

a. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(x) \geqslant x + 1$.

b. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

9 PC/PSI Soit f une fonction convexe à valeurs positives sur $[a, b]$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

10 En considérant l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, montrer que le théorème de Rolle n'est pas valable pour les fonctions à valeurs complexes.

Savoir appliquer le cours

➤ Corrigés p. 163

1 Déterminer la classe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

2 Soit f une application réelle dérivable sur $[0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$ et
$\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant f(x)$.
En considérant l'application g définie par :
$\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) = f(x)e^{-x}$,
montrer que f est nulle sur $[0, +\infty[$.

3 Soit a et b deux réels, $a < b$. Soit f et g deux applications réelles dérivables sur $[a, b]$ telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.
Montrer qu'il existe un réel λ tel que les courbes représentatives de f et de $g + \lambda$ admettent la même tangente en un point.

4 Soit f une application continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que f' soit croissante sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = 0$.
Montrer que l'application g définie par :
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ g(x) = \frac{f(x)}{x}$$
est croissante sur $]0, +\infty[$.

5 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, bornée et telle que f' est croissante.
Montrer que f est constante.

6 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa fonction réciproque.
Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et exprimer g' et g'' en fonction de g.

7 Soit a un réel et g une application continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $g(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.
On pourra introduire $G(x) = g\left(\dfrac{1}{x} - 1 + a\right)$ et utiliser le théorème de Rolle.

8 PC/PSI Montrer que pour tout couple (a, b) de réels vérifiant $0 < b \leqslant a$, on a les inégalités suivantes :
$$\frac{a-b}{a} \leqslant \ln\frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b}.$$