4 – Limites et continuité

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ Corrigés p. 129

1 Étudier la limite de f en a dans les cas suivants.

a. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $a = +\infty$.

b. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$, $a = 1$.

2 Montrer que la fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

3 La fonction $x \mapsto x\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

4 **1.** Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) - g(x) = 0$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) - g(x) = 0$, $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

5 On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

a. Montrer que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{f(x)} \underset{x \to a}{\sim} \mathrm{e}^{g(x)}$.

b. Le résultat est-il encore vrai si f n'admet pas une limite finie en a ?

6 Étudier la limite de f en 0 dans les cas suivants :

a. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

b. $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$.

c. $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

7 Donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ dans les cas suivants :

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - x + 2}$.

b. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

c. $f(x) = x^{\frac{1}{x}} - 1$.

d. $f(x) = \ln(x) + \sin(x)$.

e. $f(x) = \mathrm{ch}(x)$.

f. $f(x) = 1 - \mathrm{th}(x)$.

g. $f(x) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^x + x)$.

8 Soit a, b et c trois réels vérifiant $a < b < c$. Si f est continue sur $[a, b[$ et sur $[b, c]$, f est continue sur $[a, c]$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

9 Si f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I et si g ne s'annule pas, que peut-on dire lorsque $f^2 = g^2$?

10 Si f est une application continue sur $[0, 1[$, f est bornée sur $[0, 1[$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

11 L'image d'un intervalle ouvert (respectivement fermé) par une fonction continue est un intervalle ouvert (respectivement fermé).

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

12 Soit I un intervalle centré en 0. Si f est continue, strictement monotone et impaire sur I, f^{-1} est impaire sur $f(I)$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

Savoir appliquer le cours

➤ Corrigés p. 131

1 On pose $f(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{x + 2|x|}$.

Préciser le domaine de définition de f.

f est-elle prolongeable par continuité aux points où elle n'est pas définie ?

2 Donner un équivalent de $f(x)$ en a dans les cas suivants :

a. $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$.

b. $f(x) = \alpha^x + \ln(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $a = +\infty$.

c. $f(x) = \text{Arccos}(x)$, $a = 1^-$.

d. $f(x) = \text{Argch}(x)$, $a = 1^+$.

e. $f(x) = e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}$, $a = 0$.

3 Montrer que la courbe représentative de $f : x \mapsto \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

4 Montrer que tout polynôme de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

5 Déterminer l'ensemble E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x).$$

6 Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer qu'il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.

7 Soit f et g deux applications continues sur un segment $[a, b]$ telles que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) > g(x).$$

a. Démontrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geqslant g(x) + m.$$

b. Ce résultat reste-t-il vrai si les fonctions sont définies sur un intervalle quelconque ?

8 Soit f une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$ telle que $g : x \mapsto xf(x)$ soit croissante et telle qu'il existe $\alpha \in]0, +\infty[$ vérifiant $f(\alpha) = 0$. Montrer que f est nulle sur $[\alpha, +\infty[$.