# 3 – Suites numériques

## Avant la colle

### Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 100*

**1** Une suite de réels positifs ou nuls qui converge vers 0 est décroissante.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

**2** Une suite de réels non majorée diverge vers $+\infty$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

**3** Si $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

**4** Une suite d'entiers convergente est stationnaire.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

**5** Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n$ et si les suites convergent, $\lim_{n\to+\infty} u_n > \lim_{n\to+\infty} v_n$.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

**6** $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+n}} = \ldots$

☐ **a.** 0. ☐ **b.** 1.

**7** Si $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \ldots$

☐ **a.** 0 si $x < 0$ et $+\infty$ si $x > 0$.

☐ **b.** 1.

☐ **c.** $e^x$.

**8** Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

☐ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

**9** Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, si $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, démontrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ convergent.

**10** Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, si $(v_n)_{n\geq 0}$ est convergente et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

**11** Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_n, v_n) \in [0, 1]^2$ et si $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1, démontrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ convergent vers 1.

**12** Comment traduit-on : la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge ?

**13** Expliquer sur un exemple pourquoi on ne peut conclure lorsque $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ que $u_n + w_n \sim v_n + z_n$.

**14** Soit $a$ et $b$ deux réels non nuls tels que $a + b \neq 0$. Si $u_n \sim a w_n$ et $v_n \sim b w_n$, montrer que $u_n + v_n \sim (a+b) w_n$.

## Savoir appliquer le cours

➤ *Corrigés p. 101*

**1** Déterminer les suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ définies par :

**a.** $u_0 = u_1 = 1$,
et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

**b.** $u_0 = u_1 = 1$,
et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

**c.** $u_0 = 0,\ u_1 = 1$,
et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.

**2** Étudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{e}^{-u_n}$, puis trouver un équivalent de $u_n$.

**3** Si les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$ convergent, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

**4** Si les suites complexes $(u_n^2)_{n\geq 0}$ et $(u_n^3)_{n\geq 0}$ convergent, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

**5** Trouver $a$ et $b$ tels que :

$$\forall x > 1,\ \frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

En déduire la convergence et la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

En déduire que la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

**6** Soit $x$ un réel. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx)$, où $\mathrm{E}(y)$ représente la partie entière du réel $y$.

**7** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$.